נסמן ב- x את מהירות הרוכב המהיר (קמ"ש) ו

וב- y את מהירות הרוכב האיטי (קמ"ש)

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שניות	מהירוJ=K v = מ"ש	דרך-מרחק - s מטרים
כל הדרך	רוכב מהיר	$2\frac{2}{3}$	x	$2\frac{2}{3}x$
	רוכב איטי	$2\frac{2}{3}$	y	$2\frac{2}{3}y$
קילומטר אחד	רוכב מהיר	$\frac{1}{x}$	x	1
	רוכב איטי	$\frac{1}{y}$	y	1

שני הרוכבים עברו ביחד את כל הדרך שבין הערים, שהמרחק ביניהן הוא 120 ק"מ.

המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $2\frac{2}{3}x+2\frac{2}{3}y=120$

הרוכב המהיר עבר מרחק של קילומטר אחד בשתי דקות פחות מהרוכב האיטי.

המשוואה המתאימה, אם כן, היא: $\frac{1}{x}+\frac{2}{60}=\frac{1}{y}$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases} 2\frac{2}{3}x+2\frac{2}{3}y=120 \quad /\cdot 3 \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{60}=\frac{1}{y} \end{cases}$$

$$8x+8y=360 \quad /:8$$

$$\boxed{y=45-x}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{30}=\frac{1}{45-x} \quad /\cdot 30x(45-x)$$

$$30(45-x)+x(45-x)=30x$$

$$x^2+15x-1350=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm 75}{2}$$

$$\boxed{x=30} \quad \rightarrow \boxed{y=15}$$

פתרון שני נפסל כי המהירות חיובית.

תשובה: מהירות הרוכב המהיר 30 **קמ"ש ומהירות הרוכב האיטי** 15 **קמ"ש.**

א. 1. נבדוק עבור $n=1$ **:** $\frac{1}{1}<\frac{2^1}{\sqrt{3}}=1.15$ **לכן, הטענה נכונה עבור** $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k}<\frac{2^k}{\sqrt{2k+1}}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k\cdot k+1}<\frac{2^{k+1}}{\sqrt{2k+3}}$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k\cdot k+1}<\frac{2^k\cdot\sqrt{2k+1}\cdot2}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}}$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k\cdot k+1}<\underset{\downarrow}{\underline{\frac{2^k}{\sqrt{2k+1}}}}\cdot\frac{2\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k\cdot k+1}<\underset{\downarrow}{\underline{\frac{2^k}{\sqrt{2k+1}}}}\cdot\frac{2\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k\cdot k+1}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot k}\cdot\frac{2\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הקטן ממנו,

לכן, די אם נוכיח אי-שוויון חלש (כולל סימן השוויון)

$$\Leftrightarrow\frac{(2k+1)}{k+1}\le\frac{2\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}\quad /:\sqrt{2k+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2k+1}}{k+1}\le\frac{2}{\sqrt{2k+3}}\quad /:()^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2k+1)(2k+3)}{(k^2+2k+1)(2k+3)}\le\frac{4(k^2+2k+1)}{(2k+3)(k^2+2k+1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4k^2+8k+3}{(k^2+2k+1)(2k+3)}\le\frac{4k^2+8k+4}{(2k+3)(k^2+2k+1)}$$

ההעלאה בריבוע אפשרית – כי כל כביטויים חיוביים לכל k

המונה באגף שמאל קטן מהמונה באגף ימין, כאשר המכנים זהים (וחיוביים)

מתקבל שאגף שמאל קטן מאגף ימין

בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

א. המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{b}(\sin 4x-\cos 4x)$ **בנקודה שבה** $x=\frac{\pi}{4}$

מקביל לישר $x+y-\frac{\pi}{2}=0$ **, ששיפועו** -1 **ולכן:** $f'(\frac{\pi}{4})=-1$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{b}(\sin 4x-\cos 4x)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{b}\cdot(4\cos 4x+4\sin 4x)$$

$$-1=\frac{1}{b}\cdot(4\cos\pi+4\sin\pi)$$

$$-1=\frac{1}{b}\cdot(-4)$$

$$\boxed{b=4}$$

תשובה: $b=4$

ב. $f(x)=\frac{1}{4}(\sin 4x-\cos 4x)$

נמצא מתי מתאפסת הנגזרת

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{4}(\sin 4x-\cos 4x)}$$

$$\boxed{f'(x)=\cos 4x+\sin 4x}$$

$$0=\cos 4x+\sin 4x$$

$$\tan 4x=-1 \quad \leftarrow \cos 4x\neq 0 \quad \leftarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$4x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$$

$$\boxed{x=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{4}k}$$

$$k=0 \quad \rightarrow x=\frac{3\pi}{16}$$

$$k=1 \quad \rightarrow x=\frac{7\pi}{16}$$

נבנה טבלה לתחומי עלייה וירידה

$$f'(\frac{\pi}{16}) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} > 0$$

$$f'(\frac{4\pi}{16}) = \cos\pi + \sin\pi = -1 < 0$$

$$f'(\frac{8\pi}{16}) = \cos 2\pi + \sin 2\pi = 1 > 0$$

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{16}$		$\frac{3\pi}{16}$		0
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
מסקנה		↗		↘	**Max**	↗	

תשובה: הפונקציה עולה עבור $\frac{7\pi}{16} < x < \frac{\pi}{2}$ **או** $0 < x < \frac{3\pi}{16}$

ג. נמצא את ערכי הפונקציה בקצוות התחום הסגור ובנקודות הקיצון:

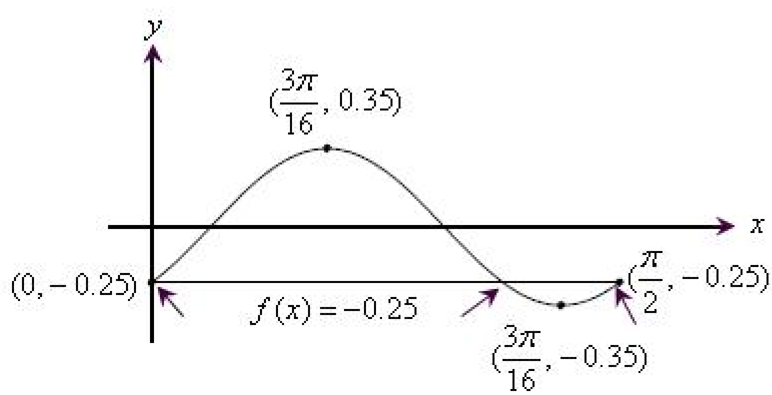
$$f(0) = \frac{1}{4}(\sin 0 - \cos 0) = -0.25 \quad (0, -0.25)$$

$$f(\frac{3\pi}{16}) = \frac{1}{4}(\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}) = 0.35 \quad (\frac{3\pi}{16}, 0.35)$$

$$f(\frac{7\pi}{16}) = \frac{1}{4}(\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4}) = 0.35 \quad (\frac{3\pi}{16}, -0.35)$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \cos 2\pi) = -0.25 \quad (\frac{\pi}{2}, -0.25)$$

נצייר סקיצה מתאימה



ניתן לראות שכאשר $m = -0.25$ **למשוואה** $f(x) = m$ **בדיוק** 3 **פתרונות בתחום** $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$**.**

תשובה: $m = -0.25$

ב. לפני הנגזרת השנייה – נעבד קצת את הנגזרת הראשונה

$f'(x)=8\sin 2x+8\sin 2x\cos 2x$

$\boxed{f'(x)=8\sin 2x+4\sin 4x}$

$\boxed{f''(x)=16\cos 2x+16\cos 4x}$

$0=16\cos 2x+16\cos 4x$

$\cos 2x=-\cos 4x$

$\cos 2x=\cos(\pi-4x)$

$2x=\pi-4x+2\pi k$ $\qquad$ $2x=-\pi+4x+2\pi k$

$6x=\pi+2\pi k$ $\qquad$ $-2x=-\pi+2\pi k$

$\boxed{x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k}$ $\qquad$ $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+\pi k}$

k	$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$
0	$x=\frac{\pi}{6}$	$x=\frac{\pi}{2}$
1	$x=\frac{\pi}{2}$	

נבנה טבלה לתחומי קמירות וקעירות, שתאפשר לאשר את נקודות הפיתול

$y''(0.1\pi)=16\cos(2\cdot 0.1\pi)+16\cos(4\cdot 0.1\pi)=17.89>0 \quad \rightarrow \cup$

$y''(0.4\pi)=16\cos(2\cdot 0.4\pi)+16\cos(4\cdot 0.4\pi)=-8<0 \quad \rightarrow \cap$

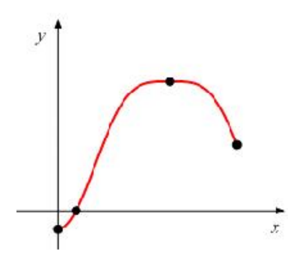
$y''(0.6\pi)=16\cos(2\cdot 0.6\pi)+16\cos(4\cdot 0.6\pi)=-8<0 \quad \rightarrow \cap$

(קבלנו גם ש- $x=\frac{\pi}{2}$ **מקסימום, כי נמצא בתחום של קעירות כלפי מטה)**

x	$x=0.8\pi$		$x=\frac{\pi}{2}$		$x=\frac{\pi}{6}$		0
y''		-	0	-	0	+	
מסקנה		$\cap$	**לא פיתול**	$\cap$	**פיתול**	$\cup$	

הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ **כאשר** $\frac{\pi}{6}<x<\frac{4}{5}\pi$ **, הפונקציה קעורה כלפי מעלה** $\cup$ **כאשר** $0<x<\frac{\pi}{6}$

ג. הפונקציה עוברת משליליות לחיוביות פעם אחת בלבד, על פי הטבלה בסעיף א.



תשובה: יש פתרון אחד למשוואה $f(x)=0$.

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא $g(x)=\frac{1}{c-0}\int_0^c ((x^2-2x)^4(x-1))dx$.

נכין את האינטגרל המתאים על ידי הצבה

$$u=x^2-2x \quad \rightarrow \frac{du}{dx}=2x-2$$

$$\frac{du}{2}=(x-1)dx$$

$$\int((x^2-2x)^4(x-1))dx=\int\frac{u^4}{2}du=\frac{u^5}{10}+c=\frac{(x^2-2x)^5}{10}+c$$

בהתאם נחשב את האינטגרל המסוים:

$$g(x)=\frac{1}{c-0}\int_0^c((x^2-2x)^4(x-1))dx$$

$$g(x)=\frac{1}{c}\cdot\frac{(x^2-2x)^5}{10}\Bigg]_0^c$$

$$g(x)=\frac{1}{c}\cdot\left[\frac{(c^2-2c)^5}{10}-\frac{(0^2-2\cdot0)^5}{10}\right]$$

$$\boxed{g(x)=\frac{1}{10}\cdot\frac{(c^2-2c)^5}{c}}$$

נמצא את נקודת הקיצון

$$g'(x)=\frac{1}{10}\cdot\frac{5c(c^2-2c)^4(2c-2)-(c^2-2c)^5}{c^2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{10}\cdot\frac{(c^2-2c)^4\left[5c(2c-2)-(c^2-2c)\right]}{c^2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{10}\cdot\frac{(c^2-2c)^4\left[10c^2-10c-c^2+2c\right]}{c^2}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{1}{10}\cdot\frac{(c^2-2c)^4(9c^2-8c)}{c^2}} \quad c^2,(c^2-2c)^4>0$$

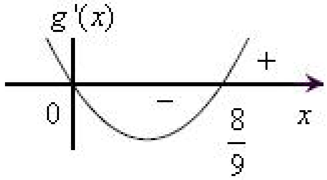
$$9c^2-8c=0$$

$$c(9c-8)=0$$

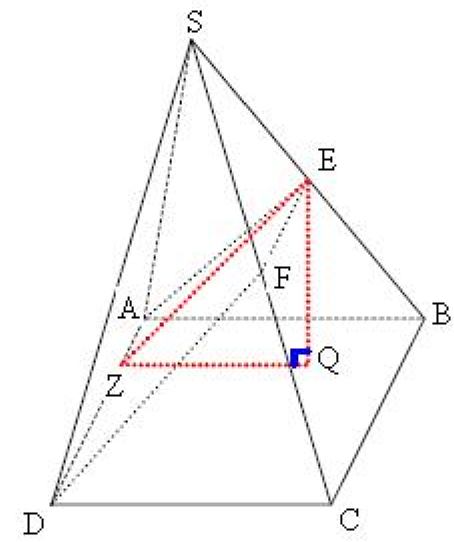
$$c=\not{0},\quad \frac{8}{9} \quad \rightarrow c>0$$

ובהתאם לציור המתאים של סימני הנגזרת
נקבל שעוברים מנגזרת שלילית (ירידה)
לנגזרת חיובית (עליה) ולכן $c=\frac{8}{9}$ **מינימום**

סימני



תשובה: עבור $c=\frac{8}{9}$ **יש לפונקציה** $f(x)=(x^2-2x)^4(x-1)$ **ממוצע קטן ביותר על הקטע** $[0,c]$ **,** $c>0$



הזווית בין מישור הבסיס ABCD **למישור** AEFD :

היא $\measuredangle$EZQ **שבין** EZ **- האנך לישר החיתוך** AD

מהמישור AEFD **(שהוא טרפז שווה שוקיים),**

לבין ZQ **- האנך ממישור הבסיס** ABCD **(שהוא ריבוע),**

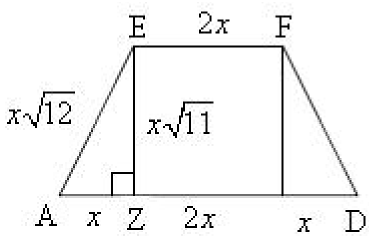
כאשר EQ **מאונך ל-** ZQ **, ההיטל של** EZ **לבסיס הפירמידה.**

נראה ש- AEFD **טרפז שווה שוקיים:**

EF **קטע אמצעים במשולש הפאה** SBC**,**

לכן מקביל ל- BC **ומכאן גם ל-** AD **ושווה למחצית שלהם.**

כיוון ש- DF = DE **הרי שזה טרפז שווה שוקיים.**



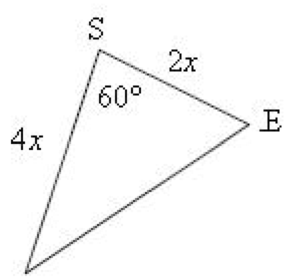
נסמן את מקצועות הפירמידה השווים ב- $4x$ **ולכן** $EF = 2x$

אם נעלה אנכים מבסיס הטרפז נקבל שני משולשים פינתיים

חופפים ובאמצע מלבן, לכן: $AZ = x$

כל מקצועות הפירמידה שווים, לכן הפאות מש"ץ ו- $\measuredangle ASE = 60°$

נמצא את AE **באמצעות משפט קוסינוסים:**



$\underline{\Delta SAE}$

$$AE^2 = (4x)^2 + (2x)^2 - 16x^2 \cos 60°$$

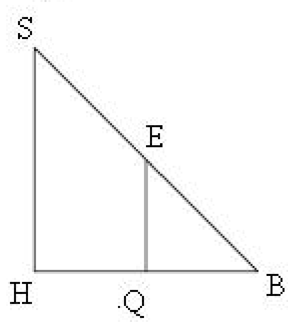
$$\boxed{AE = x\sqrt{12}}$$

נמצא את EZ **באמצעות משפט פיתגורס:**

$\underline{\Delta AEZ}$

$$(x\sqrt{12})^2 = x^2 + EZ^2$$

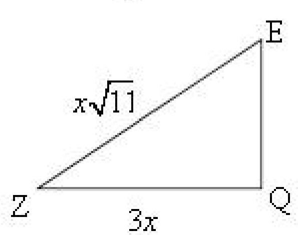
$$\boxed{EZ = x\sqrt{11}}$$



גובה הפירמידה SH **יורד למרכז הבסיס ומקביל ל-** EQ**,**

EQ **קטע אמצעים ב-** ΔSHB **ולכן** Q **אמצע** BH **, ו-** $ZQ = 3x$

נמצא את $\measuredangle$EZQ **- הזווית בין הבסיס** ABCD **למישור** AEFD



$\underline{\Delta EZQ}$

$$\cos \measuredangle EZQ = \frac{3x}{x\sqrt{11}}$$

$$\boxed{\measuredangle EZQ = 25.24°}$$

תשובה: הזווית בין הבסיס ABCD **למישור** AEFD **היא** 25.24°