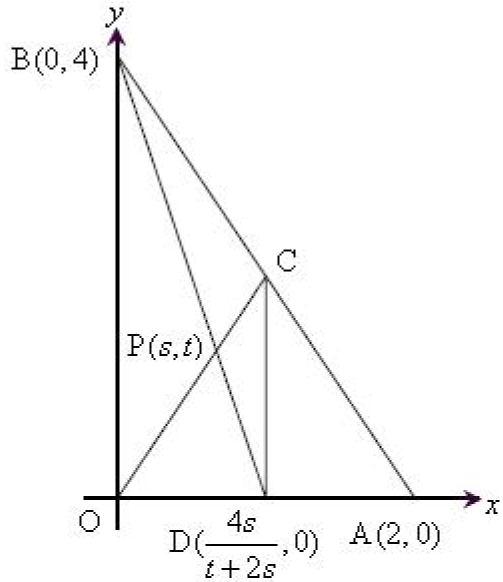
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נסמן $P(s,t)$ - נקודה על המקום הגיאומטרי.

$$m_{OC} = m_{OC} = \frac{t-0}{s-0} = \frac{t}{s}$$

לכן משוואת OC העובר בראשית היא $y = \frac{t}{s}x$

$$m_{AB} = \frac{4-0}{0-2} = -2$$

ומשוואת AB $\quad y-0=-2(x-2) \quad \to y=-2x+4$

נמצא את שיעור ה- x של הנקודה C, נקודת החיתוך בין AB ל- OC

$$\begin{cases} y = \frac{t}{s}x \\ y = -2x+4 \end{cases}$$

$$\frac{t}{s}x = -2x+4$$

$$tx + 2sx = 4s$$

$$x_C = \frac{4s}{t+2s}$$

ובהתאם שיעורי הנקודה $D(\frac{4s}{t+2s}, 0)$, שממנה הועלה אנך לנקודה C

נמצא את משוואת BD

$$m_{BD}=\frac{4-0}{0-\frac{4s}{2s+t}}=-\frac{2s+t}{s}$$

$$y-4=-\frac{2s+t}{s}(x-0)$$

$$y=-\frac{2s+t}{s}x+4$$

$P(s,t)$ **נמצאת על** BD **ולכן מקיימת את המשוואה שלו:**

$$t=-\frac{2s+t}{s}s+4$$

$$t=-2s-t+4$$

$$2t=-2s+4$$

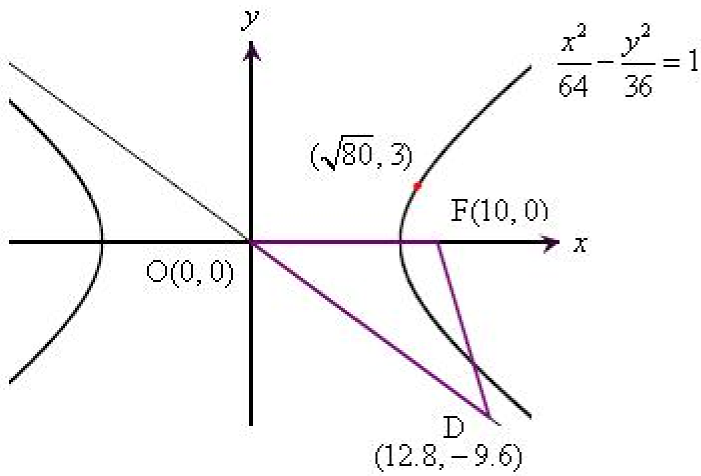
$$t=-s+2$$

ומשוואת המקום הגיאומטרי היא הישר $y=-x+2$

כיוון ש- D ***לא*** **מתלכדת עם קצות הקטע, אז** $0<x<2$

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $y=-x+2$ **,** $0<x<2$

א. נציג את הסרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



נציב את הנקודה $(\sqrt{80}, 3)$ **במשוואת ההיפרבולה** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **:**

(1) $\frac{80}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$

המוקד הימני של ההיפרבולה הוא $F(\frac{5a}{4}, 0)$ **.**

בהיפרבולה שהמוקדים שלה $(\pm c, 0)$ **מתקיים** $c^2=a^2+b^2$ **,**

לכן: (2) $(\frac{5a}{4})^2=a^2+b^2 \quad \to \frac{25a^2}{16}=a^2+b^2 \quad \to b^2=\frac{9a^2}{16}$

נציב במשוואה (1) ונקבל: $\frac{80}{a^2}-\frac{16}{a^2}=1 \quad \to a^2=64 \quad \to b^2=36$

תשובה: משוואת ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

ב. על פי סעיף א: $c=10$ $a=8, \quad b=6,$ ושיעורי המוקד הימני $F(10, 0)$.

האסימפטוטה עם שיפוע שלילי היא $y=-\frac{b}{a}x$ ובהתאם: $y=\frac{8}{6}x \quad \rightarrow y=0.75x$

נתון כי משולש OFD שווה שוקיים, כאשר $OF=FD$, לכן: $FD=10$.

נסמן: $D(x, -0.75x)$ נקודה אופיינית על האסימפטוטה

ובהתאם לנוסחת מרחק בין שתי נקודות:

$$10=\sqrt{(10-x)^2+(0+0.75x)^2} \quad *$$
$$100=100-20x+x^2+0.5625x^2$$
$$1.5625x^2-20x=0 \quad / x_D \neq 0$$
$$x_D=12.8 \quad \rightarrow y_D=-0.75\cdot 12.8=-9.6$$

ושיעורי הקדקוד השלישי במשולש הם $D(12.8, -9.6)$

(בשורה המסומנת * העלינו את שני האגפים בריבוע –
שני האגפים, לרבות הביטוי בתוך השורש חיוביים ולכן *לא* נדרשת בדיקת התוצאה)

כיוון שהצלע OF מונחת על ציר ה- x , והגובה לקדקוד D מקביל לציר ה- y

חישוב שטח המשולש הוא פשוט: $S=\frac{10\cdot 9.6}{2}=48$

(ניתן למצוא גם שטח המשולש ע"י הנוסחה לשטח משולש ע"פ שלוש נקודות:

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1)\right|$$

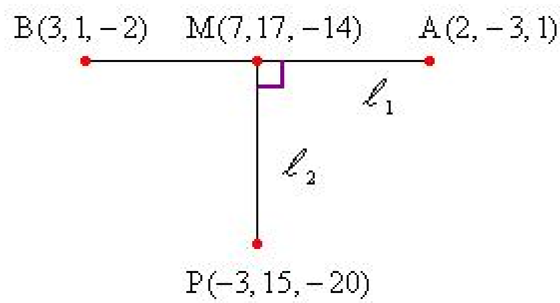
(כאשר הקדקודים לפי סדר כיוון השעון, *לא* נדרש ערך מוחלט)

$$S=\frac{1}{2}\left[0(-9.6-0)+10(0+9.6)+12.8(0-0)\right]=48$$)

תשובה: שטח משולש OFD הוא 48 יח"ר.

א. נרשום את הנקודות המשתתפות בתרגיל, והסברים בהמשך:

$A(2,-3,1)$, $B(3,1,-2)$, $P(-3,15,-20)$, $M(7,17,-14)$



נמצא הצגה פרמטרית של ℓ_1 **:**

$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} = \underline{x} = (1, 4, -3)$

לכן: $\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,1) + t(1,4,-3)$

ונקודה טיפוסית עליו היא: $M(2+t, -3+4t, 21-3t)$

נמצא הצגה פרמטרית של ℓ_2 **:**

$\overrightarrow{PM} = \underline{M} - \underline{P} = \underline{x} = (5+t, -18+4t, 21-3t)$

לכן: $\ell_2 : \underline{x} = (-3,15,-20) + s(5+t, -18+4t, 21-3t)$

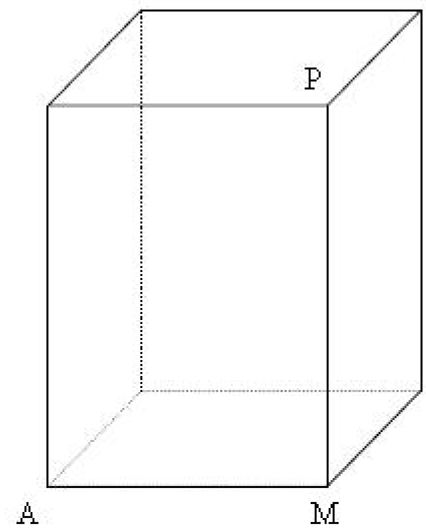
ℓ_2 **מאונך ל-** ℓ_1 **לכן המכפלה הסקלרית של ווקטורי הכיוון היא** 0

$$(5+t, -18+4t, 21-3t)\cdot(1,4,-3) = 0$$
$$5+t-72+16t-63+9t = 0$$
$$26t = 130$$
$$t = 5$$

ובהתאם: $M(7,17,-14)$ **ו-** $\overrightarrow{PM} = (10,2,6)$

תשובה: ההצגה הפרמטרית של ℓ_2 **היא:** $\ell_2 : \underline{x} = (-3,15,-20) + s(10,2,6)$

ב. נסרטט את התיבה הריבועית



(1) נפח התיבה, שבסיסה ריבוע, הוא $V = AM^2 \cdot MP$

$$AM^2 = \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = (7-2)^2 + (17+3)^2 + (-14-1)^2 = 650$$

$$MP = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{10^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{140}$$

לכן $V = 650\sqrt{140} = 7690.1$

תשובה: נפח התיבה 7690.1 יח"ק

(2) $\overrightarrow{PM}$ מאונך של שני הבסיסים, לכן הוא וקטור המקדמים של משווא מישורי הבסיסים.

בהתאם, משוואת מישורי הבסיסים היא: $®_{1,2} = 10x + 2y + 6z + d = 0$

נציב $A(2,-3,1)$ ונקבל: $10 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 + d = 0 \quad \to d = -20$

ומשוואת הבסיס היא: $10x + 2y + 6z - 20 = 0 \quad \to 5x + y + 3z - 10 = 0$

נציב $P(-3,15,-20)$ ונקבל: $10 \cdot (-3) + 2 \cdot 15 + 6 \cdot (-20) + d = 0 \quad \to d = 120$

ומשוואת הבסיס היא: $10x + 2y + 6z + 120 = 0 \quad \to 5x + y + 3z + 60 = 0$

תשובה: $5x + y + 3z - 10 = 0$, $5x + y + 3z + 60 = 0$

יש לפתור את האי-שוויון: $\sqrt{2^{x^2-4x}-\frac{1}{8}}<(\frac{7}{8})^{\frac{1}{2}}$

תחום הגדרה: ביטוי בתוך השורש אי-שלילי

$$2^{x^2-4x}-\frac{1}{8}\geq 0$$

$$2^{x^2-4x}\geq\frac{1}{8}$$

$$2^{x^2-4x}\geq 2^{-3}$$

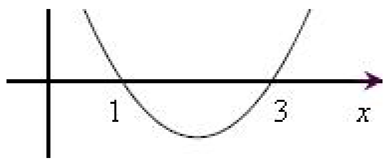
הבסיס גדול מ- 1 לכן 2^x פונקציה עולה

$$x^2-4x\geq -3$$

$$x^2-4x+3\geq 0$$

$$(x-1)(x-3)\geq 0$$

ובהתאם לציור המתאים, נקבל $x\geq 3$ או $x\leq 1$



כיוון ש- $2^{x^2-4x}-\frac{1}{8}$ חיובי בתחום ההגדרה

נעלה את שני אגפי האי- שיוויון בריבוע

$$2^{x^2-4x}-\frac{1}{8}<\frac{7}{8}$$

$$2^{x^2-4x}<1$$

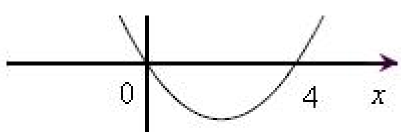
$$2^{x^2-4x}<2^0$$

הבסיס גדול מ- 1 לכן 2^x פונקציה עולה

$$x^2-4x<0$$

$$x(x-4)<0$$

ובהתאם לציור המתאים נקבל $0<x<4$



התחום המשותף עם תחום ההגדרה הוא: $3\leq x<4$ או $0<x\leq 1$

תשובה: $3\leq x<4$ או $0<x\leq 1$

נתון כי z **הוא פתרון המשוואה** $z-|z|=-1+3i$

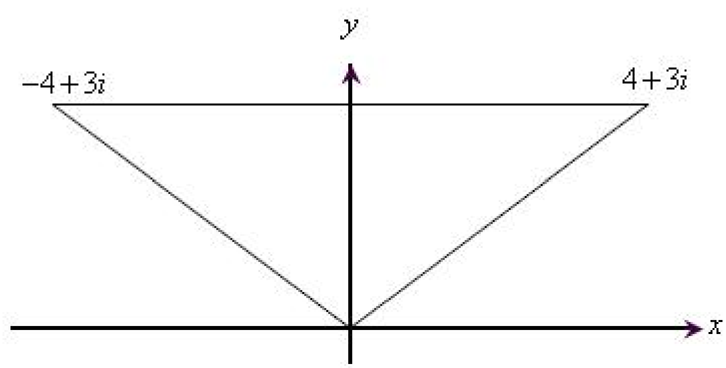
נציב $z=x+iy$ **במשוואה ונשווה מדומה למדומה וממשי לממשי:**

$$z-|z|=-1+3i$$
$$x+yi-|x+yi|=-1+3i$$
$$x+yi-\sqrt{x^2+y^2}=-1+3i$$
$$\text{I} \quad \boxed{y=3}$$
$$\text{R} \quad x-\sqrt{x^2+9}=-1$$
$$x+1=\sqrt{x^2+9}$$
$$x^2+2x+1=x^2+9$$
$$2x=8$$
$$\boxed{x=4} \quad \rightarrow 4+1=\sqrt{4^2+9} \quad \rightarrow 5=5 \; o.k.$$

הבדיקה נדרשה עקב שפתרנו משוואה אי-רציונאלית

בהתאם: $z=4+3i$ **.**

הקדקוד השני במשולש: $-(\overline{z})=-(\overline{4+3i})=-(4-3i)=-4+3i$

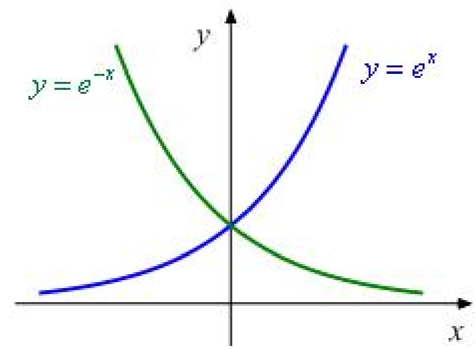


שטח המשולש הוא : $\dfrac{(4-(-4)\cdot(3-0)}{2}=\dfrac{8\cdot 3}{2}=12$

תשובה: 12 **יח"ר**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+ae^{-x}}$, $a>0$.

ניעזר בגרפים הבאים למציאת האסימפטוטות האופקיות:



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+ae^{-x}}=\frac{1}{1+a\cdot 0}=1 \quad\to \boxed{y=1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+ae^{-x}}=\frac{1}{1+a\cdot(\infty)}=0 \quad\to \boxed{y=0}$$

כיוון ש- $a>0$ אז המכנה חיובי לכל x , הפונקיה מוגדרת לכל x ואין אסימפטוטות אנכיות.

תשובה: $y=1$, $y=0$

ב. נמצא את נגזרות הפונקציה:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{1+ae^{-x}}}$$

$$f'(x)=-\frac{-ae^{-x}}{(1+ae^{-x})^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{ae^{-x}}{(1+ae^{-x})^2}}$$

כיוון ש- e^{-x} חיובי לכל x ו המכנה חיובי לכל x וגם נתון כי $a>0$

הרי שהנגזרת חיובית לכל x והפונקציה עולה תמיד

תשובה: הפונקציה עולה לכל x , הפונקציה יורדת לאף x .

ג. נמצא את הנגזרת השנייה

$$\boxed{f'(x)=\frac{ae^{-x}}{(1+ae^{-x})^2}}$$

$$f''(x)=a\cdot\frac{-e^{-x}(1+ae^{-x})^2-e^{-x}\cdot 2(1+ae^{-x})\cdot(-ae^{-x})}{(1+ae^{-x})^4}$$

$$f''(x)=ae^{-x}\cdot\frac{-1-ae^{-x}+2ae^{-x}}{(1+ae^{-x})^3}$$

$$\boxed{f''(x)=ae^{-x}\cdot\frac{-1+ae^{-x}}{(1+ae^{-x})^3}}$$

$$0=ae^{-x}\cdot\frac{-1+ae^{-x}}{(1+ae^{-x})^3}$$

$$0=-1+ae^{-x}$$

$$e^{-x}=\frac{1}{a}$$

$$\ell\text{n}\, e^{-x}=\ell\text{n}\frac{1}{a}$$

$$-x\ell\text{n}\, e=\ell\text{n}\frac{1}{a}$$

$$x=-\ell\text{n}\frac{1}{a}$$

$$x=\ell\text{n}(\frac{1}{a})^{-1}$$

$$\boxed{x=\ell\text{n}\, a}\quad\rightarrow f(\ell\text{n}\, a)=\frac{1}{1+ae^{-\ell\text{n}\, a}}=\frac{1}{1+a\cdot\frac{1}{a}}=\frac{1}{2}$$

נמצא את תחומי קמירות/ קעירות בעזרת טבלה,

(מכנה הנגזרת השנייה חיובי והכופל השמאלי חיובי)

$$f''(\ell\text{n}\, 0.5a)=-1+ae^{-\ln 0.5a}=-1+ae^{\ln\frac{1}{0.5a}}=-1+\frac{a}{0.5a}=1>0$$

$$f''(\ell\text{n}\, 2a)=-1+ae^{-\ln 2a}=-1+ae^{\ln\frac{1}{2}}=-1+\frac{a}{2a}=-0.5<0$$

הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מעלה $\cup$ **לקעירות כלפי מטה** $\cap$

ולכן $(\ell\text{n}\, a, 0.5)$ **נקודת פיתול**

כיוון ש- 0.5 **הוא הממוצע של** 0 **ו-** 1 **הרי ש-** $(\ell\text{n}\, a, 0.5)$ **במרחקים שווים**

משתי האסימפטוטות $y=0$ **ו-** $y=1$ **.**