א. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+a^2y=2 \\ x+5ay=0 \end{cases}$$

נמצא את פתרון המערכת, ותוך כדי כך את התנאי לקיומו.

$$\begin{cases} x+a^2y=2 \quad /\cdot(-1) \\ x+5ay=0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -x-a^2y=-2 \\ x+5ay=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (-a^2+5a)y=-2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-a(a-5)y=-2}$$

כאשר $a=0$ **נקבל** $0y=-2$ **,**

כאשר $a=5$ **נקבל** $0y=-2$ **.**

נציב $a=0$ **בשתי המשוואות המקוריות:**

$$\begin{cases} x+(0)^2y=2 \quad \to x=2 \\ x+5\cdot 0\cdot y=0 \quad \to x=0 \end{cases}$$

כלומר שתי המשוואות זרות ואין פתרון.

נציב $a=5$ **בשתי המשוואות המקוריות:**

$$\begin{cases} x+(5)^2y=2 \quad \to x+25y=2 \\ x+5\cdot 5\cdot y=0 \quad \to x+25y=0 \end{cases}$$

כלומר שתי המשוואות זרות ואין פתרון.

נמשיך במציאת הפתרון היחיד

$$y=\frac{2}{a(a-5)}$$

$$x+5\cancel{a}\cdot\frac{2}{\cancel{a}(a-5)}=0$$

$$x=-\frac{10}{a-5}$$

$$x=\frac{10}{5-a}$$

$$\boxed{\left(\frac{10}{5-a},\frac{2}{a(a-5)}\right),\quad a\neq 0,5}$$

תשובה: $a\neq 0,5$

ב. נמצא לאילו ערכים של a הפתרון היחיד x, y של המערכת מקיים $x\cdot y<0$.

על פי סעיף א – הפתרון היחיד הוא $a\neq 0,5 \quad (\frac{10}{5-a},\frac{2}{a(a-5)}),$

$$\frac{10}{5-a}\cdot\frac{2}{a(a-5)}<0$$

$$\frac{20}{a(5-a)(a-5)}<0$$

$$\frac{20}{-a(5-a)(5-a)}<0 \quad /\cdot(-1)$$

$$\frac{20}{a(5-a)^2}>0$$

סימן המנה נקבע על ידי a, כיוון ש $(5-a)^2$ חיובי עבור $a\neq 5$

לכן המנה חיובית עבור $a>0,\ a\neq 5$ (תוך ההתחשבות בתנאי לפתרון יחיד).

תשובה: $a>0,\ a\neq 5$.

<u>א. הסדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:</u>

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2n - a_n + 5 \end{cases}$$

יש להוכיח כי $a_{n+2} = a_n + 2$

נפעיל פעמיים את כלל הנסיגה:

$$a_{n+2} = 2(n+1) - a_{n+1} + 5$$
$$a_{n+2} = 2n + 2 - (2n - a_n + 5) + 5$$
$$a_{n+2} = 2n + 2 - 2n + a_n - 5 + 5$$
$$\boxed{a_{n+2} = a_n + 2}$$

הוכח !

<u>ב. על פי סעיף א:</u> $a_{n+2} = a_n + 2$.

לכן סדרת האיברים במקומות האי-זוגיים, וגם סדרת האיברים במקומות הזוגיים – חשבונית, כאשר $d = 2$

נסמן ב- $2n$ **את מספרי איברי הסדרה (שנתון שהוא זוגי).**

נמצא את האיבר הראשון בסדרת האיברים במקומות הזוגיים, באמצעות כלל הנסיגה:

$$a_2 = 2 \cdot 1 - a_1 + 5 = 2 - 3 + 5 = 4$$

נסדר הנתונים בטבלה מתאימה:

	מקומות זוגיים	מקומות אי-זוגיים
איבר ראשון	$a_2 = 4$	$a_1 = 3$
הפרש	2	2
מספר איברים	n	n

נתון: סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים

גדול ב- 40 **מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים**

בהתאם:

$$\frac{n}{2}(2 \cdot 4 + 2(n-1)) - \frac{n}{2}(2 \cdot 3 + 2(n-1)) = 40$$
$$\frac{n}{2}(8 + 2n - 2 - (6 + 2n - 2)) = 40 \quad / \cdot 2$$
$$n(6 + 2n - 2n - 4) = 80$$
$$n \cdot 2 = 80$$
$$n = 40$$

כיוון שמספר איברי הסדרה הוא $2n$ **הרי שבסדרה** 80 **איברים** $2 \cdot n =$.

תשובה: בסדרה 80 **איברים.**

<u>נתונים</u>

1. $ABCD$ **טרפז** $(AB \parallel CD)$

2. $BP \perp EF$

3. $BF = FC = MF$

4. $\angle ANE = \angle FEN$

עבור ג'

5. $\angle BAN = \frac{1}{2} \angle ANM$

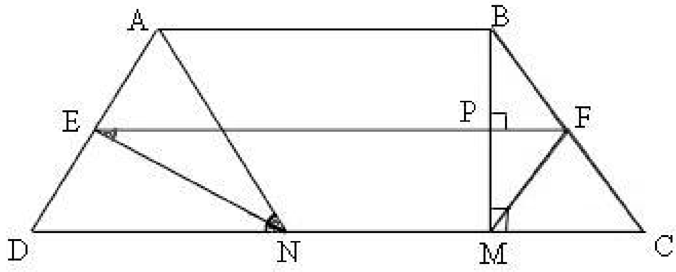
צ"ל:

א. $\angle BMC = 90°$

ב. $NA = ND$

ג. $ED = \frac{1}{2} DN$

<u>הוכחה</u>



הסבר		<u>טענה</u>	נימוק
3	6	$BF = FC = MF$	נתון
6	7	$\angle BMC = 90^\circ$	המשפט ההפוך לתיכון ליתר
		מ.ש.ל. א	
2	8	$BP \perp EF$	נתון
8	9	$\angle BPF = 90^\circ$	האנך יוצר זווית ישרה
9 ,7	10	$\angle BPF = \angle BMC$	כלל המעבר
10	11	$EF \parallel CD$	אם הזוויות המתאימות שוות אז הישרים מקבילים
1	12	$ABCD$ טרפז $(AB \parallel CD)$	נתון
12 ,11 ,6	13	EF קטע אמצעים בטרפז	יוצא מאמצע שוק ומקביל לבסיסים
13	14	E אמצע AD	קטע אמצעים בטרפז חוצה את השוקיים
14	15	NE תיכון לצלע AD ב- ΔADN	NE חוצה את הצלע
4	16	$\angle ANE = \angle FEN$	נתון
11	17	$\angle FEN = \angle END$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
17 ,16	18	$\angle ANE = \angle END$	כלל המעבר
18 ,15	19	$NA = ND$	אם התיכון מתלכד עם חוצה הזווית אז המשולש שווה שוקיים
		מ.ש.ל ב	
5	20	$\angle BAN = \frac{1}{2}\angle ANM$	נתון
11	21	$\angle BAN + \angle ANM = 180^\circ$	זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות ל- 180°
21 ,20	22	$\angle ANM = 120^\circ$	חישוב
22	23	$\angle AND = 60^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
23 ,19	24	ΔADN שווה צלעות	משולש שווה שוקיים עם זווית 60°
24	25	$AD = AN$	צלעות שוות במשולש שווה צלעות
14	26	$ED = \frac{1}{2}AD$	חישוב
26 ,25	27	$ED = \frac{1}{2}DN$	הצבה
		מ.ש.ל. ג	

<u>נתונים</u>

1. BE **הוא קוטר מעגל שמרכזו** O

2. CA **ו-** CB **משיקים למעגל**

3. $CA \perp CB$

עבור ג'

4. שטח המשולש ACE **הוא** 32 **סמ"ר**

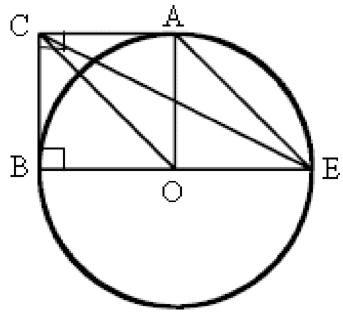
צ"ל:

א. המרובע ACBO **הוא ריבוע.**

ב. $\mathbf{S}AEC = \mathbf{S}OCE$

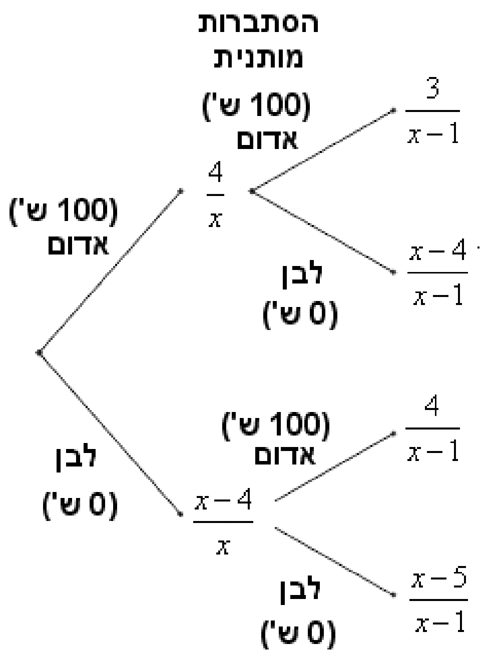
ג. רדיוס המעגל

<u>הוכחה</u>



הסבר		טענה	נימוק
2	5	CA ו- CB משיקים למעגל	נתון
5	6	$\angle OAC = \angle OBC = 90°$	הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
3	7	$CA \perp CB$	נתון
7	8	$\angle OCA = 90°$	האנך יוצר זווית ישרה
8 ,6	9	$ACBO$ מלבן	מרובע עם שלוש זוויות ישרות
	10	$OA = OB$	רדיוסים שווים זה לזה
10 ,9	11	$ACBO$ ריבוע	מלבן עם שתי צלעות סמוכות שוות
		מ.ש.ל. א	
11	12	$AC \parallel OB$	צלעות נגדיות מקבילות בריבוע
1	13	BE הוא קוטר מעגל שמרכזו O	נתון
13 ,12	14	$AC \parallel OE$	המשכים של ישרים מקבילים
4	15	$AC = OB$	צלעות שוות בריבוע
13	16	$OB = OE$	רדיוסים שווים במעגל
16 ,15	17	$AC = OE$	כלל המעבר
17 ,14	18	$ACOE$ מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות שוות ומקבילות
18	19	$AE \parallel CO$	צלעות נגדיות מקבילות במקבילית
19	20	$\angle AEC = \angle OCE$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
		מ.ש.ל ב	
4	21	שטח ΔACE הוא 32 סמ"ר	נתון
7 ,6	22	הגובה לצלע AC ב- ΔACE שווה לרדיוס מעגל O	מרחק בין ישרים מקבילים
17 ,16	23	$S_{\Delta ACE} = \frac{AC \cdot R}{2}$	נוסחת שטח משולש
17	24	$AC = R$	הצבה
24 ,23 ,21	25	$32 = \frac{R \cdot R}{2}$	הצבה
25	26	$R = 8$ ס"מ	חישוב
		מ.ש.ל. ג	

א. נבנה עץ המתאים לשאלה (כולל לסעיף ב), כאשר נסמן ב- x את מספר הכרטיסים:



א. התשובה לסעיף זה פשוטה: $\frac{4}{x}$ זכייה ב- 100 שקלים $\frac{2}{5}$ לבן

ב. נתונים ומשמעויות

$$P(\text{זכייה ב- 100 שקלים}) = \frac{2}{5}$$

P(אדום ראשון ∩ לבן שני) + P(לבן ראשון ∩ אדום שני) $= \frac{2}{5}$

P(אדום ראשון) · P(לבן שני / אדום ראשון) + P(לבן ראשון) · P(אדום שני / לבן ראשון) $= \frac{2}{5}$

$$\frac{4}{x}\cdot\frac{x-4}{x-1}+\frac{x-4}{x}\cdot\frac{4}{x-1}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{4(x-4)}{x(x-1)}+\frac{4(x-4)}{x(x-1)}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{8(x-4)}{x(x-1)}=\frac{2}{5} \quad /\cdot 5x(x-1)$$

$$40(x-4)=2x(x-1)$$

$$40x-160=2x^2-2x$$

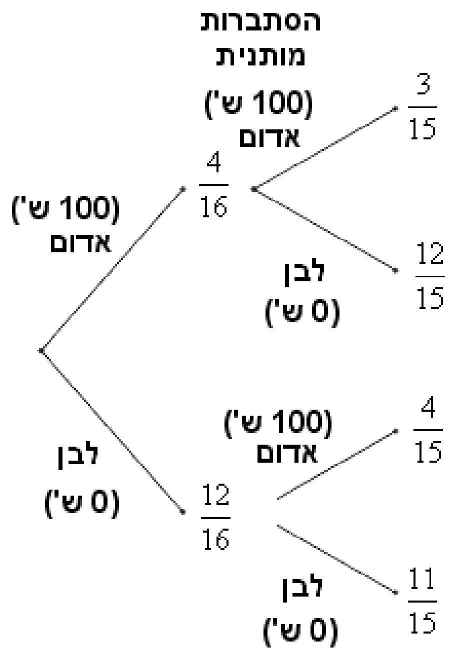
$$2x^2-42x+160=0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{42\pm 22}{4}$$

$$x_1=16, \quad x_2=5$$

כיוון שמספר הכדורים הלבנים גדול ממספר הכדורים האדומים, הרי ש: $x=16$

תשובה: $x=16$

ב. נעדכן את עץ האפשרויות:



הסכום הגבוה ביותר האפשרי, בהוצאת שני כרטיסים ללא החזרה, הוא 200 **שקלים.**

המאורע "זכה בסכום כלשהו" הוא המאורע המשלים למאורע "זכה ב- 0 **שקלים".**

$$P(\text{זכה ב-}200 \,/\, \text{זכה בסכום}) = \frac{P(\text{זכה ב-}200 \cap \text{זכה בסכום})}{P(\text{זכה בסכום})}$$

$$P(\text{זכה ב-}200 \,/\, \text{זכה בסכום}) = \frac{\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}}{1-\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}}{1-\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}} = \frac{1}{9}$$

<u>תשובה:</u> ההסתברות שהאדם זכה בסכום האפשרי הגבוה ביותר ,

כאשר נתון שזכה בפרס כלשהו, היא $\frac{1}{9}$ **.**

א. נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - **קבוצת המשתתפים במשאל**

A - **קבוצת הבנים**

$\overline{A}$ - **קבוצת הבנות**

B - **קבוצת המתקבלים לבית הספר**

$\overline{B}$ - **קבוצת הלא מתקבלים לבית הספר**

C - **קבוצת הנרשמים למגמת מוזיקה**

$\overline{C}$ - **קבוצת הנרשמים למגמת קולנוע**

טבלת הרשמה

	בנים - A	בנות - $\overline{A}$
מוזיקה - C	600	200
קולנוע - $\overline{C}$	400	600

טבלת קבלה

	בנים - A	בנות - $\overline{A}$
מוזיקה - C	240	80
קולנוע - $\overline{C}$	320	480

א. נבדוק את הפרופורציות המבוקשות, בכל אחד מהמגדרים, עבור כלל הנרשמים לבית הספר:

$$P(B/A)=\frac{N(B\cap A)}{N(A)}=\frac{240+320}{600+400}=\frac{560}{1000}=0.56=56\%$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{N(B\cap \overline{A})}{N(\overline{A})}=\frac{80+480}{200+600}=\frac{560}{800}=0.7=70\%$$

תשובה: פרופורציית הבנים שהתקבלו מכלל הבנים המועמדים היא 56% **,**

פרופורציית הבנות שהתקבלו מכלל הבנות המועמדות היא 70% **.**

ב. לפי הממצאים של סעיף א, קיים קשר סטטיסטי בין מין המועמד ובין הסיכוי לקבלתו לבית-הספר,

כאשר לבנות יש סיכוי גבוה יותר להתקבל, שכן $P(B/\overline{A})>P(B/A)$

לא בהכרח קיים קשר סיבתי בין מין המעמד לסיכויי קבלתו לבית הספר.

במחקר הבודק קשר בין שני משתנים, בלבד, לא ניתן להוכיח קיומו של קשר סיבתי.

כמו כן ייתכנו גורמים מתווכים,כמו: ממוצע הציונים, רקע קודם באמנות, מגמת הרישום ועוד.

ג. נבדוק את הפרופורציות המבוקשות, בכל אחד מהמגדרים, עבור כל מגמה בנפרד:

בקרב הנרשמים למגמת מוזיקה:

$$P(B/A)=\frac{N(B\cap A)}{N(A)}=\frac{240}{600}=0.4=40\%$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{N(B\cap \overline{A})}{N(\overline{A})}=\frac{80}{200}=0.4=40\%$$

בקרב הנרשמים למגמת קולנוע:

$$P(B/A)=\frac{N(B\cap A)}{N(A)}=\frac{320}{400}=0.8=80\%$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{N(B\cap \overline{A})}{N(\overline{A})}=\frac{480}{600}=0.8=80\%$$

לפי הממצאים של סעיף ג, לא קיים קשר סטטיסטי בין מין המועמד ובין הסיכוי לקבלתו לבית-הספר הן בקרב הנרשמים למגמת מוזיקה והן בקרב הנרשמים למגמת קולנוע,

שכן $P(B/\overline{A})=P(B/A)$

ד. הסתירה נובעת מהגורם המתווך שהוא המגמה אליה נרשם המועמד.

אומנם לא נוצר היפוך קשר, אולם הקשר הסטטיסטי לא מתקיים בקרב כל אחת מהמגמות.

הסיבות לכך הן שתיים:

(1) $$P(B/C)=\frac{N(B\cap C)}{N(C)}=\frac{80+240}{200+600}=\frac{320}{800}=0.4=40\%$$

$$P(B/\overline{C})=\frac{N(B\cap \overline{C})}{N(\overline{C})}=\frac{480+320}{600+400}=\frac{800}{1000}=0.8=80\%$$

כלומר, שיעור המתקבלים למגמת הקולנוע גבוה משמעותי משיעור המתקבלים למגמת המוזיקה

(2) $$P(C/A)=\frac{N(C\cap A)}{N(A)}=\frac{600}{600+400}=\frac{600}{1000}=0.6=60\%$$

$$P(\overline{C}/\overline{A})=\frac{N(\overline{C}\cap \overline{A})}{N(\overline{A})}=\frac{600}{200+600}=\frac{600}{800}=0.75=75\%$$

כלומר, רוב הבנים נרשמו למגמת מוזיקה, בעוד שרוב הבנות נרשמו למגמת קולנוע