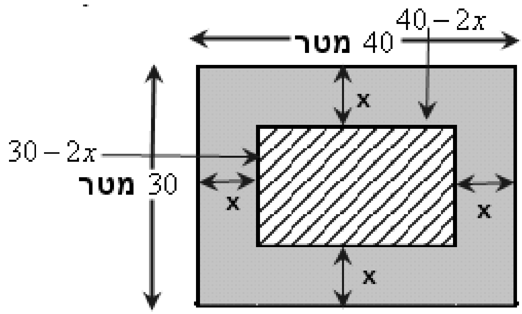
א. נציג את הנתונים על ציור מתאים ונסביר:



נחשב את שטח הגינה (השטח המקווקו בציור).

אורך הגינה: $40-2x$ **מטר**

רוחב הגינה: $30-2x$ **מטר**

שטח הגינה: $(40-2x)(30-2x)=1200-80x-60x+4x^2=4x^2-140x+1200$

תשובה: שטח הגינה הוא $4x^2-140x+1200$ **מ"ר.**

ב. נמצא את שטח השוליים,

על ידי חיסור שטח הגינה מהשטח הכולל של המגרש המלבני.

השטח הכולל של המגרש המלבני: $40\cdot 30=1200$ **מ"ר.**

שטח השוליים: $1200-(4x^2-140x+1200)=1200-4x^2+140x-1200=-4x^2+140x$

נתון כי שטח הגינה שווה לשטח השוליים, לכן: $4x^2-140x+1200=-4x^2+140x$

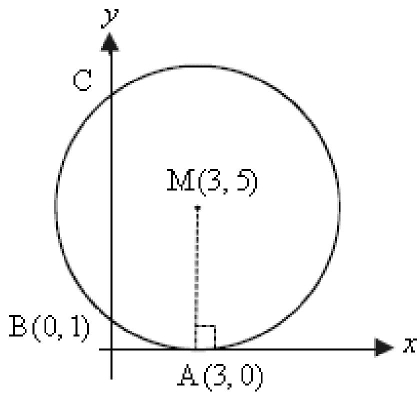
נפתור את המשוואה:

$$4x^2-140x+1200=-4x^2+140x$$
$$8x^2-280x+1200=0$$
$$x_{1,2}=\frac{280\pm 200}{16}$$
$$\cancel{x_1=30} \quad \leftarrow x<30$$
$$x_2=5$$

ובהתאם $x=5$

תשובה: $x=5$ **.**

א. נעלה ציור מתאים ונסביר בהמשך



כיוון שרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, נסרטט את הרדיוס MA **.**

הרדיוס מקביל לציר ה- y **ולכן שיעורי ה-** x **שווים ובהתאם:** $x_M = x_A = 3$

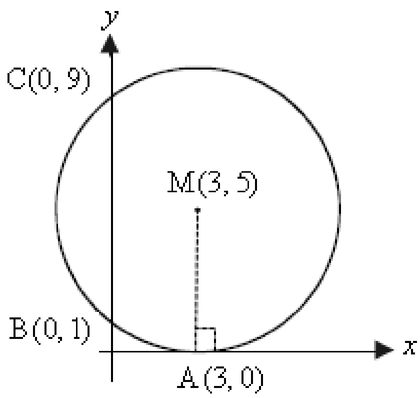
אורך הרדיוס 5 **ולכן:** $y_M - y_A = 5 \quad \to y_M - 0 = 5 \quad \to y_M = 5$

מכאן ששיעורי מרכז המעגל הם: $M(3,5)$

משוואת המעגל היא: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$

תשובה: משוואת המעגל היא: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$

ב. המעגל חותך את ציר ה- y **בנקודות** $B(0,1)$ **ו-** C **, שבהן** $x = 0$



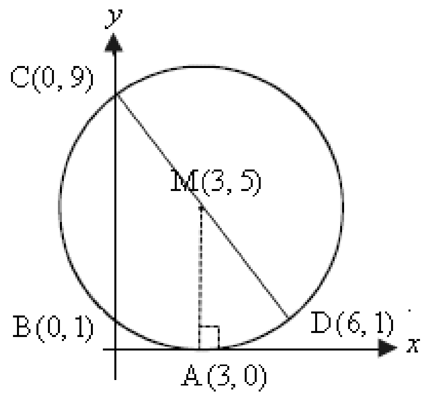
נציב $x = 0$ **במשוואת המעגל**

$$(0-3)^2 + (y-5)^2 = 25$$
$$9 + y^2 - 10y + 25 = 25$$
$$y^2 - 10y + 9 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$
$$y_1 = 9, \quad y_2 = 1$$

כיוון שנקודת חיתוך אחת נתונה $B(0,1)$ **, הרי שנקודת החיתוך השנייה היא** $C(0,9)$

תשובה: $C(0,9)$ **.**

ג. מרכז המעגל $M(3,5)$ הוא אמצע הקוטר CD



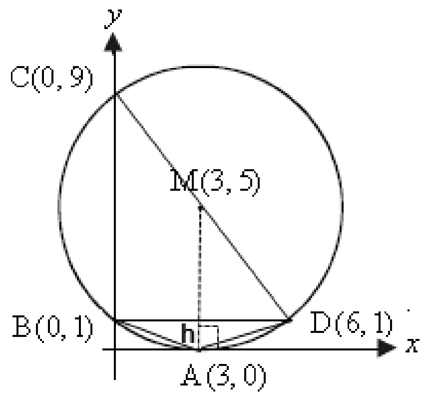
$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} \quad \to 3 = \frac{0 + x_D}{2} \quad \to 6 = x_D \quad \to x_D = 6$$

$$y_M = \frac{y_C + y_D}{2} \quad \to 5 = \frac{9 + y_D}{2} \quad \to 10 = 9 + y_D \quad \to y_D = 1$$

ובהתאם: $D(6,1)$

תשובה: $D(6,1)$

ב. נחשב את שטח המשולש ABD .



נשים לב לכך ששיעורי ה- y **של הנקודות** $B(0,1)$ **ו-** $D(6,1)$ **שווים.**

אורך הצלע BD **המקבילה לציר ה-** x **הוא** 6 **יח'** $= 6-0$

הגובה לצלע זה, המקביל לציר ה- y **הוא** 1 **יח'** $=1-0$**.**

שטח המשולש: $S = \frac{BD \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3$

תשובה: שטח משולש ABD **הוא** 3 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x+\frac{b}{x}$

תחום הגדרה: $\boxed{x\neq 0}$ **כי** $x=0$ **מאפס את המכנה.**

ב. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=3$ **, כלומר** $f'(3)=0$

$$f(x)=x+\frac{b}{x}$$

$$f'(x)=1-\frac{b}{x^2}$$

$$0=1-\frac{b}{3^2}\quad /\cdot 9$$

$$0=9-b$$

$$\boxed{b=9}$$

תשובה: $b=9$

ג. נמצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)=x+\frac{9}{x}$

$$\boxed{f(x)=x+\frac{9}{x}}$$

$$f'(x)=1-\frac{9}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-9}{x^2}}$$

$$0=\frac{x^2-9}{x^2}\quad\rightarrow 0=x^2-9\quad\rightarrow 9=x^2\quad\rightarrow x=\pm 3$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$f'(-4)=(-4)^2-9>0,\quad f'(-2)=(-2)^2-9<0$$

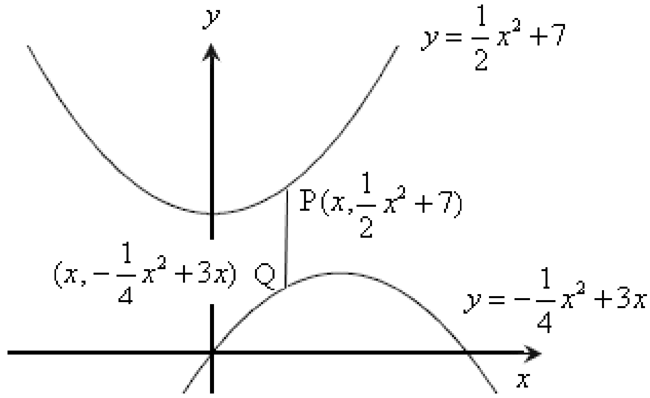
$$f'(2)=2^2-9<0,\quad f'(4)=4^2-9>0$$

x	4	3	2	0	-2	-3	-4
y'	+	0	-	$x\neq 0$	-	0	+
מסקנה	↗	**Min**	↘		↘	**Max**	↗

הפונקציה עולה, על פי הטבלה, $x>3$ **או** $x<-3$

הפונקציה יורדת, על פי הטבלה, $0<x<3$ **או** $-3<x<0$

א. נסמן את שיעור ה- x **של הנקודה** P **ב-** x



P **נמצאת על הפרבולה** $y=\frac{1}{2}x^2+7$ **, שהיא פרבולה בעלת מינימום** $(a=\frac{1}{2}>0)$

Q **נמצאת על הפרבולה** $y=-\frac{1}{4}x^2+3x$ **, שהיא פרבולה בעלת מקסימום** $(a=-\frac{1}{4}<0)$

נסמן את שיעור ה- x **של הנקודה** P **ב-** x **.**

שיעורי הנקודה P **הם** $P(x,\frac{1}{2}x^2+7)$ **.**

הקטע PQ **מקביל לציר ה-** y **ולכן שיעורי ה-** x **של הנקודות** P **ו-** Q **שווים.**

שיעורי הנקודה Q **הם** $Q(x,-\frac{1}{4}x^2+3x)$ **.**

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *אורך הקטע* PQ **.**

כיוון ש הקטע PQ **מקביל לציר ה-** y **, הרי ש:** $PQ=y_P-y_Q$ **:**

$$PQ=\frac{1}{2}x^2+7-(-\frac{1}{4}x^2+3x)$$

$$PQ=\frac{1}{2}x^2+7+\frac{1}{4}x^2-3x$$

$$\boxed{PQ=\frac{3}{4}x^2-3x+7}$$

נמצא את נקודת הקיצון:

$$\boxed{PQ=\frac{3}{4}x^2-3x+7}$$

$$\boxed{(PQ)'=\frac{3}{2}x-3}$$

$$0=\frac{3}{2}x-3 \quad /\cdot 2$$

$$0=3x-6 \quad /:(-3)$$

$$-3x=-6$$

$$\boxed{x=2}$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון

$$(PQ)'(1)=\frac{3}{2}\cdot 1-3<0, \quad (PQ)'(3)=\frac{3}{2}\cdot 3-3>0$$

x	3	2	1
$(PQ)'$	+	0	-
מסקנה	↗	**Min**	↘

$$y_P=\frac{1}{2}\cdot 2^2+7=9$$

בהתאם שיעורי הנקודה P **הם** $P(2,\ 9)$ **.**

תשובה: עבור $P(2,\ 9)$ **אורך הקטע** PQ **יהיה מינימלי**.

ב. נמצא את האורך המינימלי של הקטע PQ **.**

$$y_Q=-\frac{1}{4}\cdot 2^2+3\cdot 2=5$$

$$PQ=9-5=4$$

ובהתאם, האורך המינימלי של הקטע PQ **הוא** 4 **.**

ניתן גם להציב בפונקציה: $PQ=\frac{3}{4}\cdot 2^2-3\cdot 2+7=4$

תשובה: האורך המינימלי של הקטע PQ **הוא** 4 **.**

א. הפונקציה $y = x^2 + 5x + 7$ **והישר** $y = x + 12$ **נחתכים בנקודות** A **ו-** B.

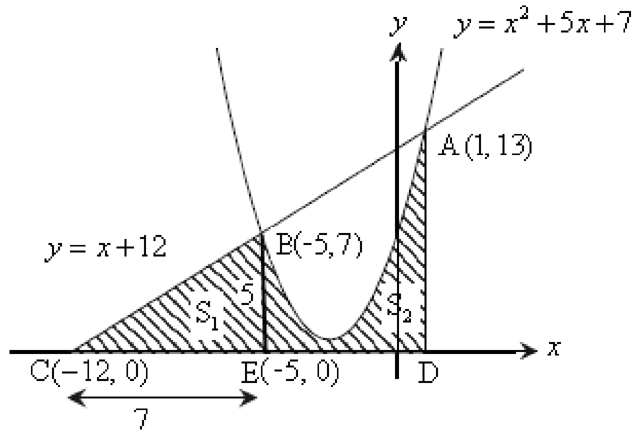
$$x^2 + 5x + 7 = x + 12$$
$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$x_{A,B} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$
$$x_A = 1 \quad \to y_A = 1 + 12 = 13 \quad \to \boxed{A(1, 13)}$$
$$x_B = -5 \quad \to y_B = -5 + 12 = 7 \quad \to \boxed{B(-5, 7)}$$

C **היא נקודת החיתוך של הישר** $y = x + 12$ **עם ציר ה-** x **, לכן** $y_C = 0$

$$0 = x + 12 \quad \to x = -12 \quad \to \boxed{C(-12, 0)}$$

תשובה: $A(1, 13)$, $B(-5, 7)$, $C(-12, 0)$

ב. נחלק את השטח לשניים, באמצעות האנך BE **מהנקודה** $B(-5, 7)$ **לציר ה- (לנקודה** $E(-5, 0)$ **, ולכן אורך האנך** $7 = 7 - 0$ **)**



נחשב את S_1 **באמצעות נוסחה לשטח משולש.**

ולכן: $S_1 = \frac{CE \cdot EB}{2} = \frac{(-5 - (-12)) \cdot (7 - 0)}{2} = \frac{7 \cdot 7}{2} = 24.5$

נכין טבלה לסיוע בחישוב S_2:

	S_2
פונקציה עליונה	$y = x^2 + 5x + 7$
פונקציה תחתונה	$y = 0$
x גדול	$x = 1$
x קטן	$x = -5$

$$S_2 = \int_{-5}^{1} (x^2 + 5x + 7 - 0)\, dx$$

$$S_2 = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 7x \Big]_{-5}^{1}$$

$$S_2 = (\frac{1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} + 7 \cdot 1) - (\frac{(-5)^3}{3} + \frac{5 \cdot (-5)^2}{2} + 7 \cdot (-5))$$

$$S_2 = 9\frac{5}{6} - (-14\frac{1}{6})$$

$$\boxed{S_2 = 24}$$

ובהתאם: $S = S_1 + S_2 = 24.5 + 24 = 48.5$

תשובה: גודל השטח מקווקו הוא 48.5 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$

בתוך שורש חייב להיות ביטוי אי – שלילי, לכן $x \geq 0$

המכנה אינו יכול להתאפס, לכן $x \neq 0$

בהתאם: תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x>0$

תשובה: $x>0$

ב. נמצא האם הנגזרת מתאפסת בתחום ההגדרה.

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}}$$

נביט על שני המחוברים שהתקבלו בנגזרת:

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **חיובי – שכן כל הגורמים בו חיוביים (תחום ההגדרה** $x>0$**).**

$\frac{1}{x^2}$ **חיובי – שכן כל הגורמים בו חיוביים (תחום ההגדרה** $x>0$**).**

לכן, סכום הביטויים חיובי והנגזרת חיובית.

אם כך: הנגזרת אינה מתאפסת, ולפונקציה אין נקודת קיצון.

ג. כיוון שהנגזרת חיובית בתחום ההגדרה, הרי שהפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.