א. נתונה הפונקציה $x \ge 0$ $f(x) = x + \sin 2x$ **, והגרף של הישר** $g(x) = x + 1$ **.**

נמצא את שיעורי הנקודה A **.**

$$x + \sin 2x = x + 1$$

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{p}{2} + 2pk$$

$$\boxed{x = \frac{p}{4} + pk}$$

$$k = 0 \quad \rightarrow \boxed{x = \frac{p}{4}}$$

כיוון ש- A **היא הנקודה הראשונה מימין לראשית הצירים, זה שיעור ה-** x **שלה**

בהתאם שיעורי הנקודה הם: $A(\frac{p}{2}, \frac{p}{2} + 1)$

תשובה: $A(\frac{p}{4}, \frac{p}{4} + 1)$

ב. השיפוע של הישר בנקודה $A(\frac{p}{4}, \frac{p}{4} + 1)$ **הוא** 1 **(כמו בכל נקודה אחרת על הישר)**

$$\boxed{f(x) = x + \sin 2x}$$

$$\boxed{f'(x) = 1 + 2\cos 2x}$$

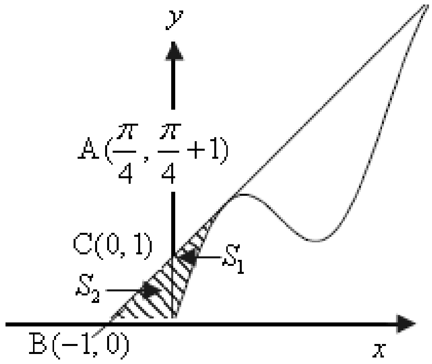
$$f'(\frac{p}{4}) = 1 + 2\cos(2 \cdot \frac{p}{4})$$

$$f'(\frac{p}{4}) = 1$$

ולכן שיפוע הישר שווה לערך נגזרת הפונקציה בנקודה <u>והישר הוא המשיק</u>

ג. $f(0)=0+\sin(2\cdot 0)$ **ולכן** $f(x)=x+\sin 2x$ **עוברת בראשית הצירים.**

נחלק את השטח המקווקו לשני שטחים, מימין ומשמאל לציר ה- y **:**



אם נציב $y=0$ **במשוואת הישר נקבל את נקודת החיתוך עם ציר ה-** x $\mathrm{B}(-1,0)$

אם נציב $x=0$ **במשוואת הישר נקבל את נקודת החיתוך עם ציר ה-** y $\mathrm{C}(0,1)$

נחשב את S_2 **באמצעות חישוב שטח משולש ישר זווית:**

$$S_2=\frac{1\cdot 1}{2}$$

$$\boxed{S_2=\frac{1}{2}}$$

	S_1
פונקציה עליונה	$g(x)=x+1$
פונקציה תחתונה	$f(x)=x+\sin 2x$
x **גדול**	$x=\frac{p}{4}$
x **קטן**	$x=0$

$$S_1=\int_0^{\frac{p}{4}}(x+1-(x+\sin 2x))dx=\int_0^{\frac{p}{4}}(1-\sin 2x)dx$$

$$S_1=x+\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\frac{p}{4}}$$

$$S_1=\left(\frac{p}{4}+\frac{\cos(\frac{2p}{4})}{2}\right)-\left(0+\frac{\cos 0}{2}\right)$$

$$\boxed{S_1=\frac{p}{4}-\frac{1}{2}}$$

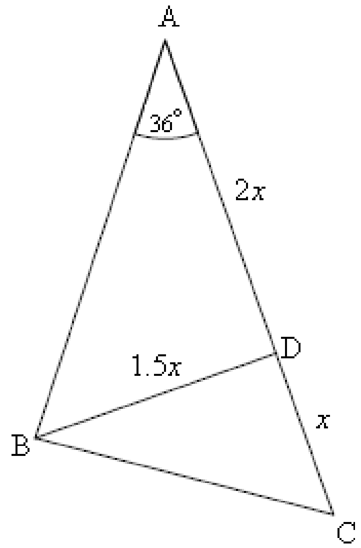
ולכן: $S=S_1+S_2=\frac{p}{4}-0.5+0.5=\frac{p}{4}$

תשובה: $\frac{p}{4}$

א. $DC = x$
(נתון) $AD = 2DC = 2x$

(נתון) $BD = 1.5DC = 1.5x$

(נתון) $\angle BAC = 36°$



נמצא תחילה את $\angle ABD$ **, באמצעות משפט הסינוסים:**

$\underline{\Delta ABD}$

$$\frac{AD}{\sin\angle ABD} = \frac{BD}{\sin\angle A}$$

$$\frac{2x}{\sin\angle ABD} = \frac{1.5x}{\sin 36°}$$

$$\frac{2\sin 36°}{1.5} = \sin\angle ABD$$

$$\angle ABD = 51.6°, \quad \angle ABD = 128.4°$$

כיוון שזוויות משולש ABC **חדות לא תיתכן**

האפשרות ש: $\angle ABC > 128.4°$ **והאפשרות השנייה נפסלת.**

$$\angle ADB = 180° - 36° - 51.6° = 92.4°$$

תשובה: $\angle ADB = 92.4°$

ב. נתון כי שטח המשולש ABC **הוא** 39 **סמ"ר**

$\angle BDC = 180° - 92.4° = 87.6°$ **(זוויות צמודות משלימות ל-** 180° **)**

$\underline{\Delta ABC}$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{BD \cdot AD \sin\angle BDA}{2} + \frac{BD \cdot CD \sin\angle CDB}{2}$

$39 = \frac{1.5x \cdot x \sin 92.4°}{2} + \frac{1.5x \cdot 2x \sin 92.4°}{2}$

$39 = 2.248x^2$

$x^2 = 17.349$

$\boxed{x = 4.2}$

תשובה: $DC =$ 4.2 **ס"מ**

יש לפתור את המשוואה $(\ln x)^2+\ln\frac{e}{x^2}-\ln e^2=\ln\frac{1}{e}$

תחום הגדרה: $x>0$ **, (ולכן בהמשך** $\ln x^2=2\ln x$ **ללא הפסד של פתרונות שליליים)**

$$(\ln x)^2+\ln\frac{e}{x^2}-\ln e^2=\ln\frac{1}{e}$$
$$(\ln x)^2+\ln e-\ln x^2-2\ln e=\ln e^{-1}$$
$$(\ln x)^2+1-2\ln x-2=-\ln e$$
$$(\ln x)^2+1-2\ln x-2=-1$$
$$(\ln x)^2-2\ln x=0$$
$$\ln x(\ln x-2)=0$$
$$\ln x=0 \quad \ln x=2$$
$$x=e^0 \quad \boxed{x=e^2}$$
$$\boxed{x=1}$$

שני הפתרונות בתחום ההגדרה: $x>0$

יש לפתור את המשוואה: $\frac{6}{5^x-4}=\frac{50\cdot 2^x}{10^{x+1}}+5$

תחום הגדרה: $5^x\neq 4 \quad \to x\neq \frac{\log 4}{\log 5} \quad \to \boxed{x\neq 0.861}$

נשים לב כי במשוואה שלושה בסיסים שונים, אולם: $\frac{10^x}{2^x}=5^x$

$$\frac{6}{5^x-4}=\frac{50\cdot 2^x}{10^{x+1}}+5$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5^x-4}=\frac{50\cdot 2^x}{10^x\cdot 10^1}+5 \qquad \leftarrow a^{x+y}=a^x\cdot a^y$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5^x-4}=5\cdot(\frac{2}{10})^x+5 \qquad \leftarrow \frac{a^x}{b^x}=(\frac{a}{b})^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5^x-4}=5\cdot\frac{1}{5^x}+5$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{t-4}=5\cdot\frac{1}{t}+5 \qquad \leftarrow \boxed{5^x=t}$$

$$\Leftrightarrow 6t=5(t-4)+5t(t-4) \qquad \leftarrow \cdot(t(t-4)$$

$$\Leftrightarrow 6t=5t-20+5t^2-20t$$

$$\Leftrightarrow 5t^2-21t-20=0$$

$$\Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{21\pm 29}{10}$$

$$\Leftrightarrow t=5 \qquad t=-0.8$$

$$\Leftrightarrow 5^x=5 \qquad \cancel{5^x=-0.8} \qquad \leftarrow 5^x>0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

תשובה: $x=1$

א. נתונה הפונקציה $y=\frac{2x}{x^2-4x+4}$

נמצא את תחום ההגדרה

$x^2-4x+4\neq 0$

$(x-2)^2\neq 0$

$\boxed{x\neq 2}$

תשובה: $x\neq 2$

ב. אסימפטוטה אנכית

$x=2$ **מאפס את המכנה אך לא את מונה הפונקציה.**

<u>אסימפטוטה אופקית</u>: מעלת פולינום מונה (1)

קטנה ממעלת פולינום מכנה (2)**, לכן** $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-4x+4}=0$

תשובה: $x=2$ **,** $y=0$

ג. <u>נקודות קיצון וסוגן</u>

$\boxed{y=\frac{2x}{(x-2)^2}}$

$y'=\frac{2(x-2)^2-2x\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$

$y'=\frac{2(x-2)(x-2-2x)}{(x-2)^4}$

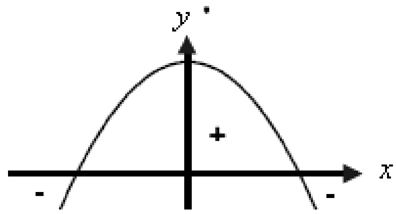
$\boxed{y'=\frac{2(x-2)(-x-2)}{(x-2)^4}}$

$0=2(x-2)(-x-2)$

$\cancel{x=2}\quad x=-2\quad\to y=\frac{2(-2)}{(-2-2)^2}=-0.25$

$(-2,-0.25)$ **חשודה כנקודת קיצון**

נצייר את סימני הנגזרת (מכנה הנגזרת חיובי)



נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה

x		2		-2	
y'	**-**		**+**	0	**-**
מסקנה	↘		↗	**Min**	↘

תשובה: $(-2,-0.25)$ **נקודת מינימום**

ד. בהתאם לתחומי עלייה וירידה שהוצגו בטבלה:

הפונקציה יורדת עבור: $x>2$ **או** $x<-2$

הפונקציה עולה עבור $-2<x<2$

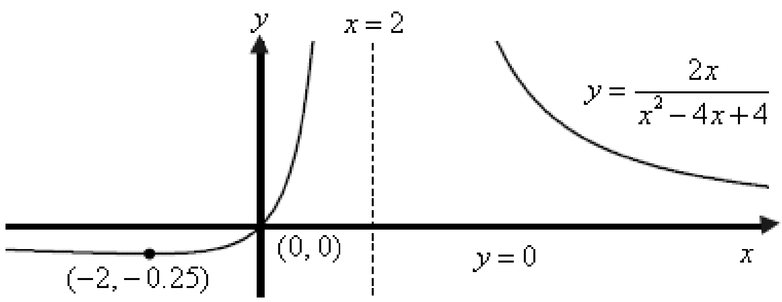
ה. נמצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים:

בציר ה- y **:** $x=0$ **ונקבל** $(0,0)$

וזו גם נקודת החיתוך היחידה עם ציר ה- x **.**

תשובה: $(0,0)$ **מינימום**

ו. <u>הסקיצה המתאימה</u>



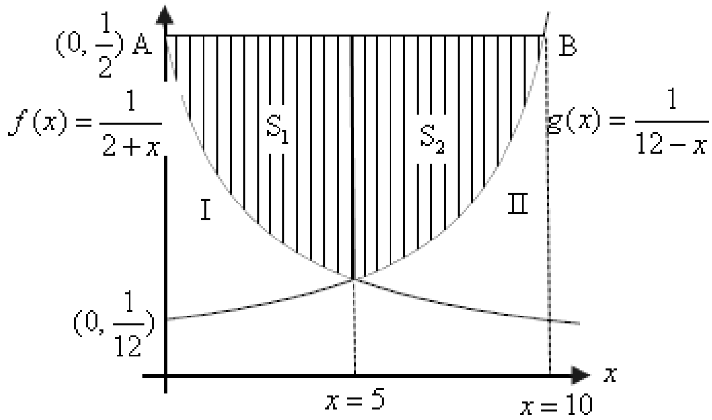
א. נזהה את הפונקציות על ידי נקודות החיתוך עם ציר ה- y **, בהן מתקיים** $x=0$

עבור $f(x)=\frac{1}{2+x}$ **נקבל** $(0,\frac{1}{2})$ **ועבור** $g(x)=\frac{1}{12-x}$ **נקבל** $(0,\frac{1}{12})$ **הממוקמת קרוב יותר לראשית.**

תשובה: $f(x)=\frac{1}{2+x}$ **גרף** I **ו-** $g(x)=\frac{1}{12-x}$ **גרף** II **.**

ב. נחלק את השטח לשני חלקים.

נביא את הציור המלא, שיוסבר בהמשך:



כיוון ש- AB **מקביל לציר ה-** x **ו-** $A(0,\frac{1}{2})$ **הרי שמשוואת הישר היא** $y=0.5$ **.**

נמצא את שיעור ה- x **של נקודת החיתוך של שתי הפונקציות**

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{12-x}$$
$$12-x=2+x$$
$$-2x=-10$$
$$x=5$$

נמצא את שיעור ה- x **של הנקודה** B **:**

$$0.5=\frac{1}{12-x}$$
$$6-0.5x=1$$
$$-0.6x=-5$$
$$x=10$$

נכין טבלה לסיוע בחישוב השטחים :

	S_2	S_1
פונקציה עליונה	$y=0.5$	$y=0.5$
פונקציה תחתונה	$g(x)=\frac{1}{12-x}$	$f(x)=\frac{1}{2+x}$
x **גדול**	$x=10$	$x=5$
x **קטן**	$x=5$	$x=0$

נחשב את שני השטחים ולאחר מכן נחבר את התוצאות

$$S_1=\int_0^5 (0.5-\frac{1}{2+x})\,dx = 0.5x-\ln(2+x)\Big]_0^5$$

$$S_1=(0.5\cdot 5-\ln 7)-(0.5\cdot 0-\ln 2)$$

$$\boxed{S_1=2.5-\ln 7+\ln 2}$$

$$S_2=\int_5^{10} (0.5-\frac{1}{12-x})\,dx = 0.5x+\ln(12-x)\Big]_5^{10}$$

$$S_1=(0.5\cdot 10-\ln 2)-(0.5\cdot 5-\ln 7)$$

$$\boxed{S_1=2.5-\ln 2+\ln 7}$$

$$S=S_1+S_2=2.5-\ln 7+\ln 2+2.5-\ln 2+\ln 7$$

$$\boxed{S=5}$$

תשובה: 5