א. נתונה המשוואה $\frac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}=m$.

נבדוק תחילה את תחום ההגדרה:

$$x^2+x-2\neq 0$$
$$(x+2)(x-1)\neq 0$$
$$x\neq 1,-2$$

נמצא מתי יש למשוואה זו שני שורשים ממשיים שונים:

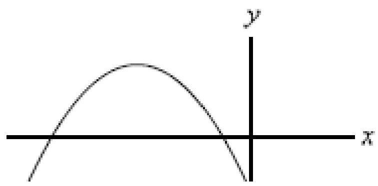
$$\boxed{\frac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}=m}$$
$$x^2+2x+1=mx^2+mx-2m$$
$$mx^2-x^2+mx-2x-2m-1=0$$
$$\boxed{(m-1)x^2+(m-2)x-2m-1=0}$$

יש למצוא עבור אילו ערכי m **קיימות שתי נקודות חיתוך.**

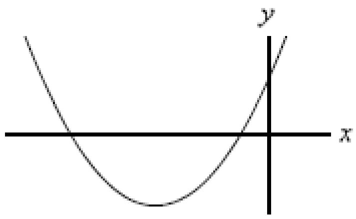
$$a=m-1 \quad b=m-2 \quad c=-2m-1$$

<u>מקרה הפרבולה (גרף של פונקציה ממעלה שנייה)</u>

נדרש גרף של פרבולה, כדוגמת:



או

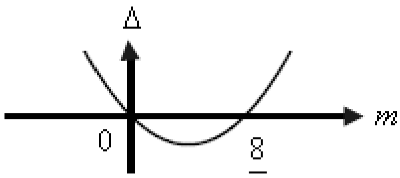


התנאים הנדרשים הם: $\Delta>0$ **(שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **)**

$a\neq 0$ **(גרף של פרבולה), כלומר** $m\neq 1$

<u>$\Delta>0$</u>

$$\Delta=b^2-4ac>0$$
$$(m-2)^2-4(m-1)\cdot(-2m-1)>0$$
$$m^2-4m+4-4(-2m^2-m+2m+1)>0$$
$$m^2-4m+4+8m^2+4m-8m-4>0$$
$$9m^2-8m>0$$
$$m\cdot(9m-8)$$
$$m_1=0 \quad m_2=\frac{8}{9}$$



ולכן $m>\frac{8}{9}$ **או** $m<0$

נבדוק המשוואה עבור $x=1$: $(m-1)(1)^2+(m-2)(1)-2m-1=0 \quad \rightarrow -4=0$, כלומר פסוק שקר,

נבדוק המשוואה עבור $x=-2$: $(m-1)(-2)^2+(m-2)(-2)-2m-1=0 \quad \rightarrow -1=0$, כלומר פסוק שקר

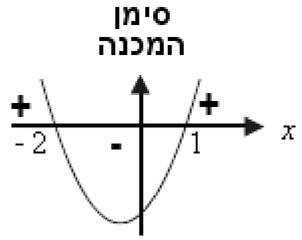
<u>**התשובה הסופית**</u> **לשני התנאים:** $m\neq 1$, $m>\frac{8}{9}$ **או** $m<0$

ב. נבדוק עבור אילו ערכים של x , m הוא שלילי,

כלומר: $\frac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}<0$ **, או** $\frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-1)}<0$

כיוון שהמונה אי-שלילי לכל x , ומתאפס עבור $x=-1$.

הרי שסימן המנה נקבע בהתאם לסימן המכנה.



המכנה שלילי עבור $-2<x<1$ והמונה מתאפס עבור $x=-1$.

תשובה: $x\neq -1$ **,** $-2<x<1$

א. הסדרה a_n **מוגדרת על ידי** $a_{n+1}=2a_n-1$ **והסדרה** b_n **על ידי** $b_n=a_n+k$**:**

נתון כי כל איבר בסדרה b_n **גדול פי** 2 **מהאיבר הקודם לו, לכן:** $b_{n+1}=2b_n$ **(** b_n **סדרה הנדסית,** $q=2$ **)**

נציב $b_n=a_n+k$ **ונקבל:** $a_{n+1}+k=2(a_n+k)$

נציב $a_{n+1}=2a_n-1$ **ונקבל:** $2a_n-1+k=2a_n+2k \quad \leftarrow \boxed{k=-1}$

תשובה: $k=-1$ **.**

ב. $a_{n+1}=2a_n-1 \quad , \quad b_n=a_n-1$

נתון: $a_{15}+b_{15}=4097$ **ועל פי הגדרת** b_n **נקבל כי** $b_{15}=a_{15}-1$**.**

בהתאם: $a_{15}+a_{15}-1=4097 \leftarrow a_{15}=2049 \leftarrow b_{15}=2048$

כיוון שהראינו כי b_n **הנדסית עם** $q=2$**, הרי ש:**

$$b_{15}=b_6q^9$$
$$2048=b_6\cdot 2^9$$
$$b_6=4 \quad \rightarrow a_6=b_6+1=4+1=5$$

ומכאן ש: $b_6+a_6=4+5=9$

תשובה: 9 **.**

<u>נתונים</u>

1. הקשת $\overset{\frown}{AB}$ **היא בת** $180°$.

2. $DE = EB$

עבור ב:

3. משולש DCE **הוא משולש שווה צלעות.**

4. $AD = 5$ **ס"מ**

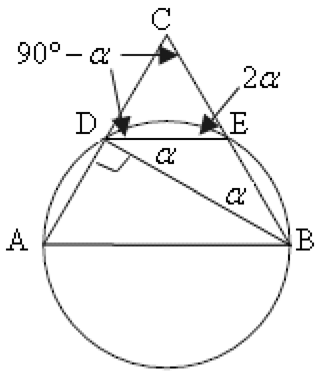
צ"ל:

א. ΔDCE **שווה שוקיים**

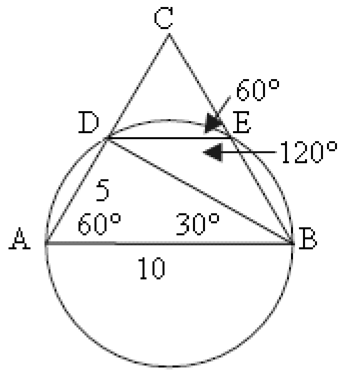
ב. רדיוס המעגל

<u>הוכחה</u>

ציור עבור סעיף א'



ציור עבור סעיף ב'



הסבר		טענה	נימוק
2	5	$DE = EB$	נתון
4	6	$\sphericalangle DBE = \sphericalangle ADB = a$	מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות ב- ΔBED + סימון
5	7	$\sphericalangle CED = 2a$	זווית חיצונית שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה ב- ΔBED
1	8	הקשת $\overset{\frown}{AB}$ היא בת $180°$.	נתון
8	9	AB קוטר	הקוטר מחלק את המעגל לשתי קשתות שוות
9	10	$\sphericalangle ADB = 90°$	זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה
10	11	$\sphericalangle CDB = 90°$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
6,11	12	$\sphericalangle CDE = 90° - a$	הפרשי זוויות
7,12	13	$\sphericalangle C = 90° - a$	סכום זוויות ב- ΔDCE הוא $180°$
12 ,13	14	$\sphericalangle C = \sphericalangle CDE$	כלל המעבר
14	15	ΔDCE שווה שוקיים	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔDCE
		מ.ש.ל. א	
3	16	ΔDCE שווה צלעות	נתון
8	17	$\sphericalangle DEC = 60°$	זוויות מש"ץ שוות ל- $60°$
14 ,13	18	$\sphericalangle DEB = 120°$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
12	19	$\sphericalangle A = 60°$	זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל- $180°$
16 ,15	20	$\sphericalangle DBA = 30°$	סכום זוויות ב- ΔADB הוא $180°$
17	21	$AD =$ 5 ס"מ	נתון
21, 20, 19, 10	22	$AB =$ 10 ס"מ	במשולש שזוויותיו $30°, 60°, 90°$ הניצב מול זווית בת $30°$ שווה למחצית היתר
22, 9	23	רדיוס המעגל 5 ס"מ	הרדיוס שווה למחצית הקוטר
		מ. ש. ל. ג	

<u>נתונים</u>

1. $ABCD$ **טרפז והבסיסים** AB **ו-** DC

2. $AE = BE$

3. $DF = CF$

4. $AB =$ **ס"מ** 8

5. $DC =$ **ס"מ** 24

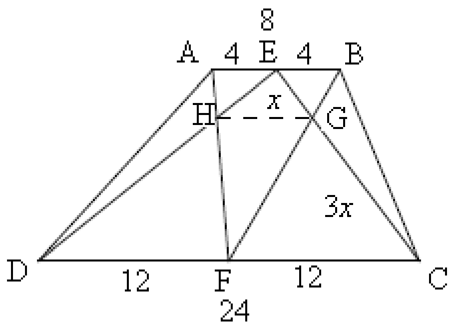
צ"ל:

א. $\frac{EG}{GC}$

ב. HG **מקביל לבסיסי הטרפז**

ג. אורך הקטע HG

<u>הוכחה</u>

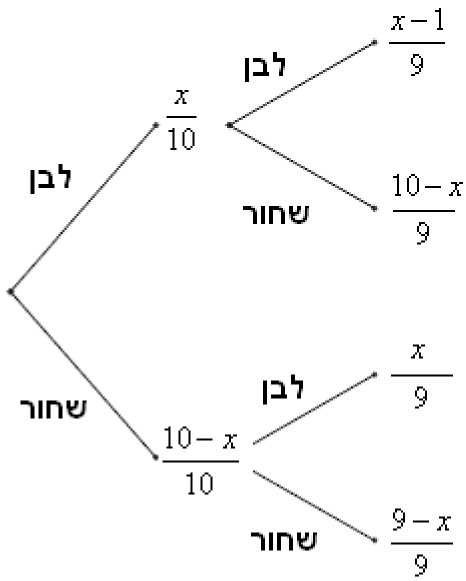


הסבר		טענה	נימוק
1	6	ABCD טרפז הבסיסים AB ו- DC	נתון
6	7	$AB \parallel CD$	בסיסי הטרפז מקבילים זה לזה
4	8	$AB =$ 8 ס"מ	נתון
2	9	$AE = BE$	נתון
9, 8	10	$BE = AE =$ 4 ס"מ	חישוב
5	11	$DC =$ 24 ס"מ	נתון
3	12	$DF = CF$	נתון
12, 11	13	$CF = DF =$ 12 ס"מ	חישוב
7	14	$BE \parallel CF$	חלקים מקטעים מקבילים – מקבילים גם
14, 13, 10	15	$\frac{EG}{GC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	משפט תאלס הרחבה 2
		מ.ש.ל. א	
7	16	$BE \parallel CF$	חלקים מקטעים מקבילים – מקבילים גם
8	17	$\frac{EH}{HD} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	משפט תאלס הרחבה 2
17, 15	18	$HG \parallel DC$	משפט תאלס הפוך
18, 7	19	$HG \parallel AB$	טרנזיטיביות במקבילים
		מ.ש.ל. ב	
15	20	$\frac{EG}{EC} = \frac{1}{4}$	חישוב
18	21	$\frac{HG}{DC} = \frac{EG}{EC}$	משפט תאלס הרחבה 1
21, 20, 11	22	$\frac{HG}{24} = \frac{1}{4}$	הצבה
22	23	$HG =$ 6 ס"מ	חישוב
		מ. ש. ל. ג	

א. נבנה עץ המתאים לשאלה, כאשר נסמן ב- x את מספר הכדורים הלבנים:

הסתברות

מותנית



<u>נתונים ומשמעויות</u>

P(**כדורים שוני צבע**) $= \frac{8}{15}$

P(**לבן ראשון** $\cap$ **שחור שני**) + P(**שחור ראשון** $\cap$ **לבן שני**) $= \frac{8}{15}$

P(**לבן ראשון**) $\cdot$ P(**שחור שני/לבן ראשון**) + P(**שחור ראשון**) $\cdot$ P(**לבן שני/שחור ראשון**) $= \frac{8}{15}$

$$\frac{x}{10}\cdot\frac{10-x}{9}+\frac{10-x}{10}\cdot\frac{x}{9}=\frac{8}{15}$$

$$\frac{x(10-x)}{90}+\frac{(10-x)x}{90}=\frac{8}{15}$$

$$\frac{2x(10-x)}{90}=\frac{8}{15} \quad /\cdot 90$$

$$20x-2x^2=48$$

$$2x^2-20x+48=0$$

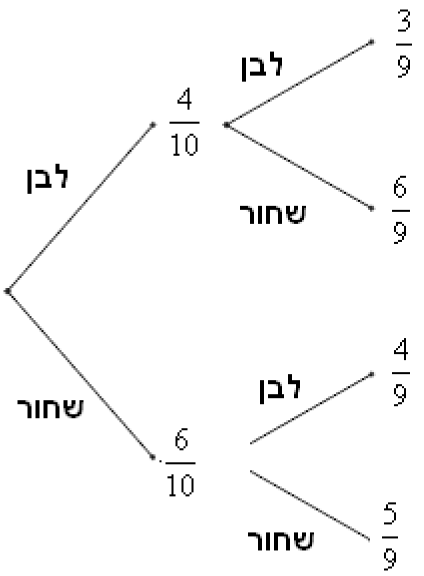
$$x_{1,2}=\frac{20\pm 4}{4}$$

$$x_1=6,\quad x_2=4$$

כיוון שמספר הכדורים השחורים גדול ממספר הכדורים הלבנים, הרי ש: $x=4$

תשובה: 4 **כדורים לבנים,** 6 **כדורים שחורים .**

ב. נעדכן את עץ האפשרויות:



על מנת שיישארו בכד מספר כדורים זהה מכל צבע יש להוציא שני כדורים שחורים:

$$P(\text{שני כדורים שחורים}) = P(\text{שחור ראשון} \cap \text{שחור שני})$$

$$P(\text{שני כדורים שחורים}) = P(\text{שחור ראשון}) \cdot P(\text{שחור שני} / \text{שחור ראשון})$$

$$P(\text{שני כדורים שחורים}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

תשובה: ההסתברות שיישארו בכד מספר שווה של כדורים מכל צבע היא $\frac{1}{3}$ **.**

א. נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - **קבוצת המשתתפים במשאל**

A **- קבוצת הנהגים הותיקים**

$\overline{A}$ **- קבוצת הנהגים הצעירים**

B **- קבוצת הנהגים המעורבים בתאונות דרכים השנה**

$\overline{B}$ **- קבוצת הנהגים שאינם מעורבים בתאונות דרכים השנה**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$\boxed{N(S) = 400}$$

$$\boxed{N(\overline{A}) = 80}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{N(\overline{A})}{N(A)} = \frac{80}{400} = 0.2 \quad \to P(A) = 0.8$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.72$$

$$P(A / B) = \frac{8}{13} \quad \to P(\overline{A} / B) = \frac{5}{13}$$

<u>פיתוח נוסחאות פרופורציה מותנית</u>

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{8}{13} = \frac{0.08}{P(B)}$$

$$P(B) = 0.13$$

<u>נציב בטבלה ונשלים נתונים</u>

	A **ותיקים**	$\overline{A}$ **חדשים**	
B **- מעורבים**	0.08	0.05	0.13
$\overline{B}$ **- לא מעורבים**	0.72	0.15	0.87
	0.8	0.2	1

תשובה: אחוז הנהגים שהיו מעורבים בתאונת דרכים השנה היה 13**.**

ב.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.08}{0.8}=0.1$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap \overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0.05}{0.2}=0.25$$

לכן, $P(B/\overline{A})>P(B/A)$ **ולנהג חדש יש יותר סיכוי להיות מעורב בתאונת דרכים.**

ג. לא בהכרח קיים קשר סיבתי בין הוותק בנהיגה לבין מעורבות בתאונת דרכים.

במחקר הבודק קשר בין שני משתנים, בלבד,

לא ניתן להוכיח קיומו של קשר סיבתי.

כמו כן ייתכנו גורמים מתווכים,

כמו: מין הנהג, סוג הרכב, אזור מגורים, מורה הנהיגה ועוד.