א. x **- מחיר כיסא (שקלים), לפני ההנחה.**

$4x$ **- מחיר שולחן (שקלים) לפני ההנחה, כי מחיר זה גבוה פי** 4 **ממחיר כיסא.**

הסוחר קיבל הנחה של 10% **על כל שולחן, והנחה של** 5% **על כל כיסא, ובהתאם:**

$\frac{100-10}{100}\cdot x=0.9x$ **מחיר כיסא לאחר ההנחה**

$\frac{100-5}{100}\cdot 4x=0.95\cdot 4x=3.8x$ **מחיר שולחן לאחר ההנחה**

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה.

סך הכול של התשלומים שווה למחיר כפול כמות .

	כמות	**מחיר ליחידה ₪**	**סך הכול ₪**
כיסאות	40	$0.9x$	$40\cdot 0.9x=36x$
שולחנות	10	$3.8x$	$10\cdot 3.8x=38x$

לאחר ההנחה שילם הסוחר $14,800$ **שקלים, עבור הסחורה שקנה.**

והמשוואה המתאימה: $36x+38x=14,800$

נפתור את המשוואה:

$$36x+38x=14,800$$
$$74x=14,800 \quad /:74$$
$$x=200$$

בהתאם, מחיר כיסא 200 **שקלים ומחיר שולחן** 800 **שקלים**$=4\cdot 200$

תשובה: המחיר המקורי של כיסא הוא 200 **שקלים, והמחיר המקורי של שולחן הוא** 800 **שקלים.**

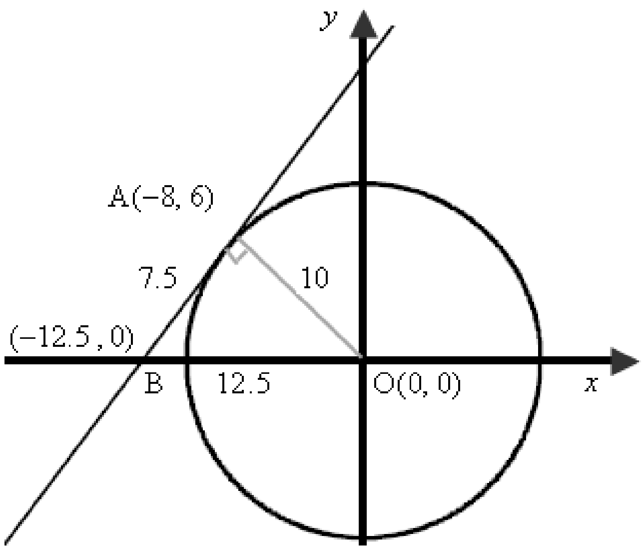
ב. ללא ההנחה היה משלם הסוחר $16,000$ **שקלים** $=40\cdot 200+10\cdot 800$

לאחר ההנחה שילם הסוחר $14,800$ **שקלים, עבור הסחורה שקנה.**

לכן ההנחה היא $1,200$ **שקלים**$=16,000-14,800$

תשובה: ההנחה שקיבל הסוחר היא $1,200$ **שקלים בסך הכול.**

א. נתון המעגל $x^2+y^2=100$ **.**



שיעור ה- y **של נקודה** A **הוא** 6 **.**

$$x^2+6^2=100$$
$$x^2+36=100$$
$$x^2=64$$
$$x=8 \quad or \quad x=-8$$

הנקודה A **נמצאת ברביע השני ולכן** $x_A=-8$

תשובה: $x_A=-8$ **.**

ב. המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה $A(-8,6)$ **, כאשר מרכז המעגל בראשית הצירים** $O(0,0)$

$$m_{OA}=\frac{6-0}{-8-0}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

שיפוע המשיק AB **הופכי לנגדי לשיפוע של הרדיוס** OA **, כי הם מאונכים זה לזה, לכן** $m_{AB}=\frac{4}{3}$ **,** $A(-8,6)$

$$y-6=\frac{4}{3}(x-(-8)) \quad \to y-6=\frac{4}{3}(x+8)$$
$$y-6=\frac{4}{3}x+10\frac{2}{3} \quad \to \boxed{y=\frac{4}{3}x+16\frac{2}{3}}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y=\frac{4}{3}x+16\frac{2}{3}$ **.**

ג. נמצא את היקף המשולש AOB **:**

הצלע AO **היא רדיוס המעגל, לכן** $AO=10$

B **נמצאת על ציר ה-** x **, לכן** $B(\ ,0)$ **ובהתאם:**

$$0=\frac{4}{3}x+16\frac{2}{3} \quad \to -\frac{4}{3}x=16\frac{2}{3} \quad /:(-\frac{4}{3}) \quad \to x_B=-12.5$$

$$BO=0-(-12.5)=12.5$$

שיעורי הנקודה $B(-12.5,0)$ **ולכן:**

$$(AB)^2=(-8-(-12.5))^2+(6-0)^2 \quad \to AB=7.5$$

היקף המשולש AOB **:** $10+12.5+7.5=30$

תשובה: היקף המשולש AOB **הוא** 30 **י"א.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^3+12x+a$

שיעור ה- y **של נקודת המקסימום של הפונקציה הוא** 16**.**

נמצא את שיעור ה- x **של נקודת המקסימום על-מנת להציב את שיעורי הנקודה ב-** $f(x)$ **ולגלות את** a **.**

$$\boxed{f'(x)=-3x^2+12}$$

$$0=-3x^2+12 \quad \rightarrow 3x^2=12$$

$$x^2=4 \quad \rightarrow x=\pm 2$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון

$$f'(-3)=-3\cdot(-3)^2+12<0$$

$$f'(0)=-3\cdot 0^2+12>0$$

$$f'(3)=-3\cdot 3^2+12<0$$

מסקנה	y'	x
↘	-	3
Max	0	2
↗	**+**	0
Min	0	-2
↘	-	-3

ב- $x=2$ **עוברים מעלייה לירידה ולכן מקסימום .**

מכאן ששיעורי נקודת המקסימום הם $(2,16)$

נציב את שיעורי הנקודה בתבנית הפונקציה הנתונה:

$$16=-2^3+12\cdot 2+a$$

$$16=16+a$$

$$\boxed{a=0}$$

תשובה: $a=0$ **.**

ב. נציב $a=0$ **ונקבל שהפונקציה הנתונה היא** $f(x)=-x^3+12x$

על פי הטבלה, $x=-2$ **היא נקודת מינימום ובהתאם :** $f(-2)=-(-2)^3+12\cdot(-2)=-16$

תשובה: $(-2,-16)$ **מינימום.**

ג. נמצא תחומי עלייה וירידה על פי הטבלה

תשובה: עלייה: $-2<x<2$ **, ירידה:** $x>2$ **או** $x<-2$ **.**

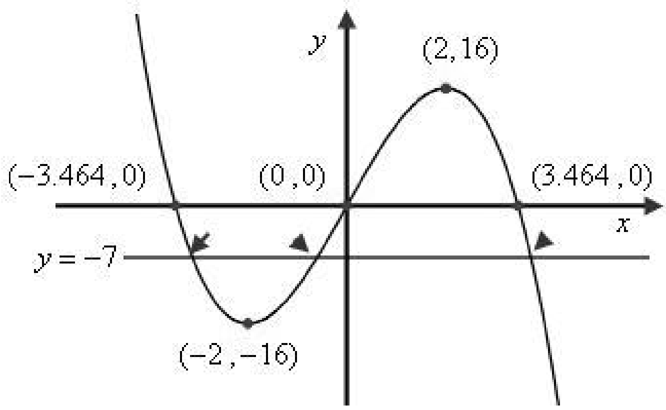
ד. בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$

$$0=-x^3+12x$$
$$0=x(-x^2+12)$$
$$x=0 \qquad -x^2+12=0$$
$$\boxed{(0,0)} \qquad 12=x^2$$
$$x=\pm\sqrt{12}$$
$$\boxed{(3.464,0)},\ \boxed{(-3.464,0)}$$

ולמעשה, קבלנו גם את נקודת החיתוך עם ציר ה- y שהיא $(0,0)$

תשובה: $(0,0)$, $(3.464,0)$, $(-3.464,0)$

ה. נסרטט את הסקיצה, כולל הישר $y=-7$ עבור סעיף ו



ו. על פי הציור יש לישר $y=-7$ שלוש נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $f(x)$

תשובה: 3 **נקודות חיתוך.**

א. נראה כי הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}$ **היא** $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ **:**

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ **ולכן ניתן לרשום את הפונקציה בצורה הבאה**

$$f(x)=x\sqrt{x}$$

$$f(x)=x\cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=x^{1\frac{1}{2}} \quad \leftarrow a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$

$$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$$

ובהתאם: $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

הוּכַח

ניתן להוכיח גם על ידי נגזרת מכפלה

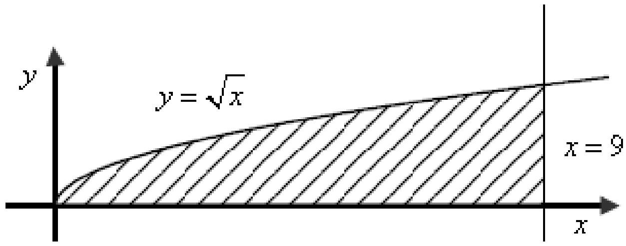
$$f'(x)=1\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x} \quad \leftarrow \frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$$

$$f'(x)=1\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

ב. נחשב את השטח המבוקש

בסעיף א הראינו כי $(x\sqrt{x})'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ **ומכאן ש:** $\int\sqrt{x}\,dx=\frac{x\sqrt{x}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{x\sqrt{x}}{1.5}+c$ **.**

כמו כן, נמצא את שיעור ה- x **של הקצה השמאלי של השטח:** $0=\sqrt{x} \quad \rightarrow x=0$



$$S=\int_0^9(\sqrt{x}-0)\,dx$$

$$S=\frac{x\sqrt{x}}{1.5}\Big]_0^9$$

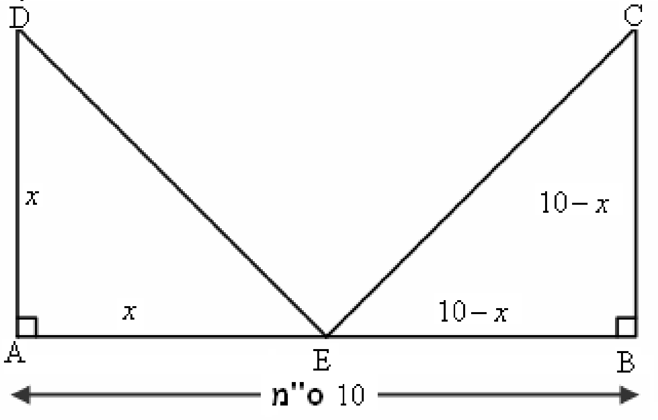
$$S=(\frac{9\cdot\sqrt{9}}{1.5})-(\frac{0\cdot\sqrt{0}}{1.5})$$

$$S=(\frac{9\cdot 3}{1.5})-0$$

$$S=18$$

	S
פונקציה עליונה	$f(x)=\sqrt{x}$
פונקציה תחתונה	$y=0$
x **גדול**	$x=9$
x **קטן**	$x=0$

תשובה: גודל השטח המקווקו הוא 18 **יח"ר.**



א. נסמן ב- x **את אורך הקטע** AE **ולכן** $BE = 10 - x$

(1) נתון כי $AE = DA$ **,** $EB = CB$ **.**

ולכן: $AD = x$ **,** $BC = 10 - x$

תשובה: $AD = x$ **,** $BC = 10 - x$

(2) נשתמש במשפט פיתגורס בשני המשולשים:

$\underline{\Delta DEA}$

$(DE)^2 = (AE)^2 + (AD)^2$

$(DE)^2 = (x)^2 + (x)^2$

$\boxed{(DE)^2 = 2x^2}$

$\underline{\Delta CEB}$

$(CE)^2 = (BE)^2 + (BC)^2$

$(CE)^2 = (10-x)^2 + (10-x)^2$

$(CE)^2 = (10-x)(10-x) + (10-x)(10-x)$

$(CE)^2 = 100 - 10x - 10x + x^2 + 100 - 10x - 10x + x^2$

$\boxed{(CE)^2 = 2x^2 - 40x + 200}$

תשובה: $DE^2 = 2x^2$ **,** $CE^2 = 2x^2 - 40x + 200$

ב.הפונקציה שיש להביא ל*מינימום* היא הסכום $DE^2 + CE^2$ **:**

$f(x) = 2x^2 + 2x^2 - 40x + 200$

$\boxed{f(x) = 4x^2 - 40x + 200}$

נמצא את נקודת הקיצון:

$\boxed{f'(x) = 8x - 40}$

$0 = 8x - 40$

$-8x = -40 \quad / : (-8)$

$\boxed{x = 5}$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון

$f'(4) = 8 \cdot 4 - 40 < 0, \quad f'(6) = 8 \cdot 6 - 40 > 0$

x	6	5	4
$P'(x)$	+	0	-
מסקנה	↗	**Min**	↘

ב- $x = 5$ **עוברת הפונקציה מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

תשובה: $x = 5$ **, עבורו הסכום של** $DE^2 + CE^2$ **יהיה מינימלי.**

א. נתונה הפונקציה $g(x)=(x-a)^2$ **,** $(a>0)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$

$$g(0)=(0-a)^2=(-a)^2=a^2 \quad \rightarrow \boxed{(0,a^2)}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$

$$0=(x-a)^2 \quad \rightarrow 0=x-a \quad \rightarrow \boxed{(a,0)}$$

תשובה: $(0,a^2)$, $(a,0)$**.**, $(a,0)$

ב. נתון כי $\int_0^a g(x)\,dx=2\frac{2}{3}$ **- נחשב את האינטגרל המסוים ונשווה ל-** $2\frac{2}{3}$

$$\int_0^a (x-a)^2\,dx=$$

$$\int_0^a \left[(x-a)(x-a)\right]dx=$$

$$\int_0^a \left[(x^2-ax-ax+a^2)\right]dx=$$

$$\int_0^a \left[(x^2-2ax+a^2)\right]dx=$$

$$\frac{x^3}{3}-2a\cdot\frac{x^2}{2}+a^2x\Big]_0^a=$$

$$\left(\frac{a^3}{3}-2a\cdot\frac{a^2}{2}+a^2\cdot a\right)-\left(\frac{0^3}{3}-2a\cdot\frac{0^2}{2}+a^2\cdot 0\right)=$$

$$\frac{a^3}{3}$$

ובהתאם:

$$\frac{a^3}{3}=2\frac{2}{3} \quad /\cdot 3$$

$$a^3=8$$

$$a=\sqrt[3]{8}$$

$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$ **.**

אפשר ורצוי גם בדרך הבאה:

$$\int_0^a (x-a)^2\,dx=\frac{(x-a)^3}{3}\Big]_0^a=\left(\frac{(a-a)^3}{3}\right)-\left(\frac{(0-a)^3}{3}\right)=\frac{a^3}{3}$$