א. נתונה הפונקציה $y = 7\sin x - \cos 2x - 3$ **בתחום** $0 \le x \le 2p$ **.**

הפונקציה מוגדרת בתחום סגור $0 \le x \le 2p$ **, ולכן ניתן למצוא גם את ערכי הפונקציה בקצוות.**

$$f(0) = 7\sin(0) - \cos(2\cdot 0) - 3 = -4$$
$$f(2p) = 7\sin(2p) - \cos(2\cdot 2p) - 3 = -4$$

לכן נקודות הקצה הנן: $(2p, -4)$, $(0, -4)$

נמצא נקודות קיצון פנימיות:

$$\boxed{y = 7\sin x - \cos 2x - 3}$$
$$\boxed{y' = 7\cos x + 2\sin 2x}$$
$$0 = 7\cos x + 2\sin 2x$$
$$0 = 7\cos x + 4\sin x\cos x$$
$$0 = \cos x(7 + 4\sin x)$$
$$\cos x = 0 \qquad \cancel{\sin x = -\frac{7}{4}} \qquad \leftarrow -1 \le \sin x \le 1$$
$$\boxed{x = \frac{p}{2} + p k}$$

עבור $k = 0$ **נקבל נקודת קיצון פנימית, שבה** $x = \frac{p}{2}$

עבור $k = 1$ **נקבל נקודת קיצון פנימית, שבה** $x = \frac{3p}{2}$

$$f(\frac{p}{2}) = 7\sin(\frac{p}{2}) - \cos(2\cdot\frac{p}{2}) - 3 = 5$$
$$f(\frac{3p}{2}) = 7\sin(\frac{3p}{2}) - \cos(2\cdot\frac{3p}{2}) - 3 = -9$$

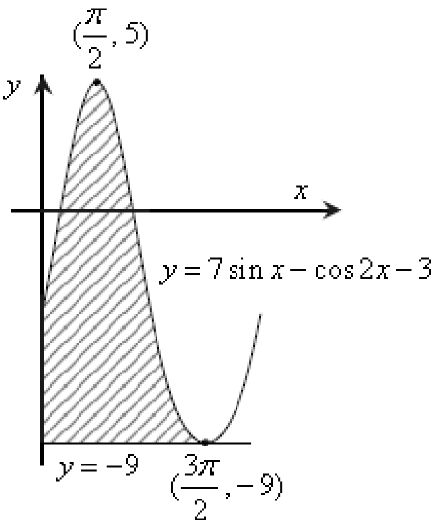
נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (בעזרת ערכי הפונקציה), למרות שניתן להסתמך על הציור !!!

0		$x = \frac{p}{2}$		$\frac{3p}{2}$		$2p$	x
-4		5		-9		-4	y
Min	↗	**Max**	↘	**Min**	↗	**Max**	**מסקנה**

כתשובה ניתן רק את נקודות הקיצון הפנימיות, כמבוקש

תשובה: $(\frac{p}{2}, 5)$ **מקסימום פנימי ,** $(\frac{3p}{2}, -9)$ **מינימום פנימי**

ב. נחשב את השטח המבוקש וניעזר בטבלה מתאימה:



משוואת המשיק בנקודת המינימום ($(\frac{3\pi}{2}, -9)$, שיפוע 0) היא $y = -9$.

	S
פונקציה עליונה	$y = 7\sin x - \cos 2x - 3$
פונקציה תחתונה	$y = -9$
x **גדול**	$x = \frac{\pi}{2}$
x **קטן**	$x = 0$

נחשב את השטח המבוקש:

$$S = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (7\sin x - \cos 2x - 3 - (-9))dx$$

$$S = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (7\sin x - \cos 2x + 6)dx$$

$$S = -7\cos x - \frac{\sin 2x}{2} + 6x \Big]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

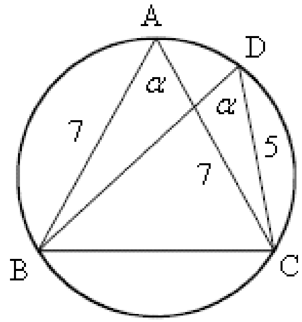
$$S = (-7\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{\sin(2\cdot\frac{3\pi}{2})}{2} + 6\cdot\frac{3\pi}{2}) - (-7\cos 0 - \frac{\sin(2\cdot 0)}{2} + 6\cdot 0)$$

$$S = (9\pi) - (-7)$$

$$\boxed{S = 9\pi + 7}$$

תשובה: גודל השטח המבוקש $9\pi + 7$ **יחידות שטח.**

א. נעלה את השרטוט המעודכן והסברים בהמשך:



<u>ניתוח נתונים</u>

$\angle A = \angle D = a$ **(זוויות היקפיות שוות, שנשענות על אותה קשת** BC**).**

$AB = AC = 7$ **(משולש שווה שוקיים)** $DC = 5$ **(נתון)**

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{49}{40}$$

$$\frac{49}{40} = \frac{\frac{AB \cdot AC \cdot \sin a}{2}}{\frac{BD \cdot DC \cdot \sin a}{2}}$$

$$\frac{49}{40} = \frac{7 \cdot 7}{BD \cdot 5}$$

$$\boxed{BD = 8}$$

תשובה: $BD = 8$ **ס"מ**

ב. נתון גם כי שטח המשולש BDC **הוא** $10\sqrt{3}$**.**

$$S_{\Delta BDC} = 10\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \frac{BD \cdot DC \cdot \sin a}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\frac{8 \cdot 5 \cdot \sin a}{2} = 10\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{a = 60^\circ} \quad \leftarrow 0 < a < 90^\circ$$

לכן משולש ABC **הוא לא רק שווה שוקיים, אלא גם שווה צלעות, כלומר** $BC = 8$ **ס"מ**

<u>ΔBDC</u>

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin \angle DBC}$$

$$\sin \angle DBC = \frac{5 \sin 60^\circ}{7}$$

$$\boxed{\angle DBC = 38.21^\circ} \quad \leftarrow 0 < \angle DBC < 90^\circ$$

$$\boxed{\angle DCB = 81.79^\circ} \quad \leftarrow \angle DCB + \angle DBC + \angle BDC = 180^\circ$$

תשובה: 60° **,** 38.21° , 81.79°

יש לפתור את המשוואה $(\log_4 x)^2 - \log_{16} x = \frac{1}{2}$

תחום הגדרה: $x > 0$

$$(\log_4 x)^2 - \log_{16} x = \frac{1}{2}$$

$$(\log_4 x)^2 - \frac{\log_4 x}{\log_4 16} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$t^2 - \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \boxed{\log_4 x = t}$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = 1 \quad \rightarrow \log_4 x = 1 \quad \rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$t_1 = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \log_4 x = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow x = 4^{-0.5} \quad \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{4}} \quad \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

הפתרונות בתחום ההגדרה $x > 0$

תשובה: $x = 4$ **,** $x = \frac{1}{2}$

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2^{2x}}{x}$ **, המוגדרת בתחום** $x\neq 0$

נמצא את תחומי העלייה והירידה :

$$\boxed{f(x)=\frac{2^{2x}}{x}}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot 2^{2x}\ln 2-2^{2x}}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2^{2x}(2x\ln 2-1)}{x^2}}$$

$$0=\frac{2^{2x}(2x\ln 2-1)}{x^2}$$

$$2x\ln 2-1=0$$

$$x=\frac{1}{2\ln 2}$$

$$x=\frac{1}{\ln 4}$$

$$\boxed{x=0.721}$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה ($\frac{2^{2x}}{x^2}$ **חיובי) :**

$$f'(-1)=2\cdot(-1)\ln 2-1=-2.39<0$$

$$f'(0.7)=2\cdot 0.7\ln 2-1=-0.02<0$$

$$f'(0.73)=2\cdot 0.73\ln 2-1=0.01>0$$

x	0.7	0.721	0.7	0	-1
y'	+	0	-		-
מסקנה	↗	**Max**	↘		↘

תשובה: ירידה: $x<0.721,\ x\neq 0$ **, עלייה:** $x>0.721$ **.**

א. הישר $y=2x+1$ **משיק לגרף הפונקציה** $f(x)=(\ln x)^2+a\ln x+b$

תחום ההגדרה $x>0$

שיפוע הישר הוא 2**, בנקודה שבה** $x=1$ **, כלומר** $f'(1)=2$

בנקודת ההשקה $y=2\cdot 1+1=3$**, כלומר** $f(1)=3$

$$f(x)=(\ln x)^2+a\ln x+b$$
$$3=(\ln 1)^2+a\ln 1+b$$
$$3=0+0+b$$
$$\boxed{b=3}$$

בהתאם: $f(x)=(\ln x)^2+a\ln x+3$

$$\boxed{f(x)=(\ln x)^2+a\ln x+3}$$
$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{a}{x}$$
$$2=\frac{2\ln 1}{1}+\frac{a}{1}$$
$$2=0+a$$
$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2\ ,\ b=3$

בהתאם:$f(x)=(\ln x)^2+2\ln x+3$

ג. נמצא את הישר המקביל לציר ה- x **ומשיק לפונקציה** $f(x)$ **, כלומר** $f'(x)=0$

$$\boxed{f(x)=(\ln x)^2+2\ln x+3}$$
$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}$$
$$0=\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}$$
$$0=2\ln x+2$$
$$\ln x=-1$$
$$x=e^{-1}$$
$$x=\frac{1}{e}\quad\to y=(\ln\frac{1}{e})^2+2\ln\frac{1}{e}+3=1-2+3=2$$

כלומר הנקודה שבה המשיק מקביל לציר ה- x **היא** $(\frac{1}{e},2)$

ובהתאם משוואת הישר היא $y=2$ **.**

תשובה: $y=2$

, $f(t)=K\cdot a^t$

כאשר K **- הכמות ההתחלתית**

a **הוא גורם הגידול,** $f(t)$ **הכמות לאחר זמן** t**.**

נמצא את גורם הגידול בשמורה א',

כאשר נתון כי: $f(10)=500 \quad t=10, \quad K=300,$

$$500=300\cdot a^{10} \quad /:300$$

$$1.6667=a^{10}$$

$$a=\sqrt[10]{1.6667}$$

$$\boxed{a=1.0524}$$

קצב הגידול השנתי של מספר הציפורים בשמורה א'

גדול פי 1.02 **מקצב הגידול השנתי של מספר הציפורים בשמורה ב'.**

לכן, עבור שמורה ב' גורם הגידול הוא:

$$1.02a=1.0524$$

$$\boxed{a=1.0318}$$

נמצא כעבור כמה שנים מיום הקמת המדינה יהיה מספר הציפורים בשמורה א'

גדול פי 2 **ממספר הציפורים בשמורה ב'.**

$$300\cdot 1.0524^t=2\cdot 400\cdot 1.0318^t$$

$$\frac{1.0524^t}{1.0318^t}=2.6667 \quad \to (\frac{1.0524}{1.0318})^t=2.6667$$

$$(\frac{1.0524}{1.0318})^t=2.6667 \quad \to 1.02^t=2.6667$$

$$\ln 1.02^t=\ln 2.6667 \quad \to t\ln 1.02=\ln 2.6667$$

$$t=\frac{\ln 2.6667}{\ln 1.02} \quad \to \boxed{t=49.53}$$

כלומר, כעבור 49.53 **שנים מיום הכרזת המדינה יהיה מספר הציפורים בשמורה א'**

גדול פי 2 **ממספר הציפורים בשמורה ב'.**

תשובה: כעבור 49.53 **שנים.**