א. $ABCD$ **טרפז שווה שוקיים,** $AB \parallel CD$ **(נתון)**

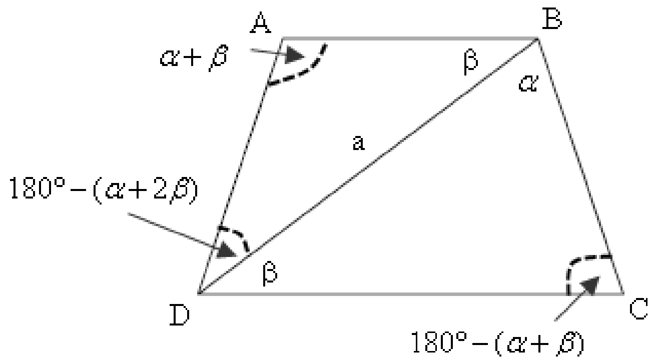
$\angle BDC = \beta$ **(זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים)**

$\angle C = 180° - (\alpha + \beta)$ **(סכום זוויות משולש** ΔDBC $180°$**)**

$\angle ABC = \alpha + \beta$ **(סכום זוויות)** $\angle A = \alpha + \beta$ **(זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים)**

$\angle ADB = 180° - (\alpha + \beta + \beta) = 180° - (\alpha + 2\beta)$ **(סכום זוויות** ΔAKB $180°$**)**

נמצא את אורך הבסיס AB **, על פי משפט הסינוסים:**



$\underline{\Delta ABD}$

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle A}$$

$$\frac{AB}{\sin(180° - (\alpha + 2\beta))} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\boxed{AB = \frac{a \sin(\alpha + 2\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}}$$

$\underline{\Delta BCD}$

$$\frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{BD}{\sin \angle C}$$

$$\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180° - (\alpha + \beta))}$$

$$\boxed{CD = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}}$$

תשובה: $AB = \dfrac{a \sin(\alpha + 2\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ **,** $CD = \dfrac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

ב. נתון: $DC = 2AB$ **,** $\alpha = 2\beta$ **.**

$$\frac{a \sin 2\beta}{\sin(2\beta + \beta)} = 2 \cdot \frac{a \sin(2\beta + 2\beta)}{\sin(2\beta + \beta)} \quad / : a > 0$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin 4\beta$$

$$\sin 2\beta = 4 \sin 2\beta \cos 2\beta \quad / : \sin 2\beta > 0 \quad \leftarrow 0° < \beta < 60°$$

$$0.25 = \cos 2\beta$$

$$2\beta = \pm 75.52° + 360° k$$

$$\beta = \pm 37.76° + 180° k$$

$$\boxed{\beta = 37.76°} \quad \leftarrow 0° < \beta < 60°$$

$$\boxed{\alpha = 75.52°}$$

תשובה: $\alpha = 75.52°$ **,** $\beta = 37.76°$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2\cos^2 x+2\cos x+1$ **בתחום** $0\le x\le 2p$ **.**

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $\boxed{(0,5)} \leftarrow \quad f(0)=2\cos^2 0+2\cos 0+1=5$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:** $0=2\cos^2 x+2\cos x+1$ **,**

וזאת משוואה ריבועית אשר בה $\Delta=-4<0$ **ולכן חסרת פתרון ואין נקודת חיתוך עם ציר ה-** x **.**

תשובה: $(0,5)$

(2) נמצא תחילה את נקודות הקצה

$f(0)=5 \quad \rightarrow \boxed{(0,5)}$

$f(2p)=2\cos^2 2p+2\cos 2p=1 \quad \rightarrow \boxed{(2p,5)}$

$\boxed{f'(x)=-4\cos x\sin x-2\sin x}$

$0=-4\cos x\sin x-2\sin x$

$0=-2\sin x(2\cos x+1)$

$\sin x=0 \qquad \cos x=-0.5=\cos\frac{2p}{3}$

$x=pk \qquad x=\frac{2p}{3}+2pk \qquad x=-\frac{2p}{3}+2p$

k	$x=pk$	$x=\frac{2p}{3}+2pk$	$x=-\frac{2p}{3}+2pk$
0	**קצה**	$x=\frac{2p}{3}$	-
1	$x=p$	-	$x=\frac{4p}{3}$
2	**קצה**		

$f(p)=2\cos^2 p+2\cos p=1 \quad \rightarrow \boxed{(p,1)}$

$f(\frac{2p}{3})=2\cos^2\frac{2p}{3}+2\cos\frac{2p}{3}=1 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{2p}{3},0.5)}$

$f(\frac{4p}{3})=2\cos^2\frac{4p}{3}+2\cos\frac{4p}{3}=1 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{4p}{3},0.5)}$

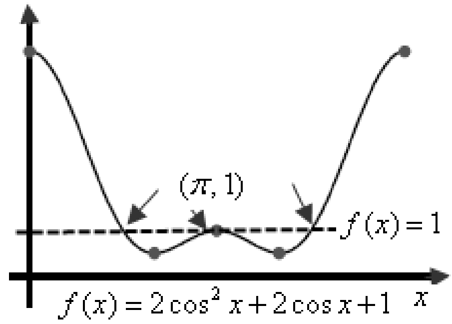
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

x	0		$\frac{2p}{3}$		p		$\frac{4p}{3}$		$2p$
$f(x)$	5		0.5		1		0.5		5
מסקנה	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(\frac{2p}{3},0.5)$ **,** $(\frac{4p}{3},0.5)$ **מינימום ,** $(p,1)$ **,** $(0,5)$ **,** $(2p,5)$ **מקסימום.**

(3) עלייה: $\frac{2p}{3}<x<p$ **או** $\frac{4p}{3}<x<2p$ **, ירידה:** $0<x<\frac{2p}{3}$ **או** $p<x<\frac{4p}{3}$

ב. הסקיצה המתאימה (כולל סימון הנקודה $(p,1)$ כהסבר לסעיף ג) :



ג. כאשר $m=1$ נקבל שלושה פתרונות למשוואה $f(x)=2\cos^2 x+2\cos x+1=m$, כפי שניתן לראות בציור.

תשובה: $m=1$.

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

q **הוא גורם הגידול,** M_t **הכמות לאחר זמן** t**.**

א. לאחר 5 **שנים עלה ערך הקרקע ב-** 40%**, כלומר הכמות עלתה מ-** M_0 **ל-** $1.4M_0$ **ב-** 5 **שנים.**

$$1.4M_0 = M_0 \cdot q^5 \quad / : M_0$$
$$1.4 = q^5$$
$$q = \sqrt[5]{1.4}$$
$$\boxed{q = 1.0696}$$

נמצא את גורם הגידול:

$$q = \frac{100+P}{100}$$
$$1.0696 = \frac{100+P}{100}$$
$$106.96 = 100 + P$$
$$P = 6.96$$

תשובה ערך הקרקע גדל ב- 6.96% **מדי שנה .**

ב. אחוז ירידת הערך החל מ- 2005 **גדול פי שניים מאחוז העלייה שלו בחמש השנים הקודמות,**

כלומר $P = 2 \cdot 6.96 = 13.92$ **-** 13.92% **ירידת ערך מדי שנה.**

נמצא את גורם הדעיכה:

$$q = \frac{100-P}{100}$$
$$q = \frac{100-13.92}{100}$$
$$q = 0.8608$$

נמצא באיזו שנה הגיע ערך הקרקע ל- 89% **מערכה בינואר** 2000**, כלומר ל-** $0.89M_0$

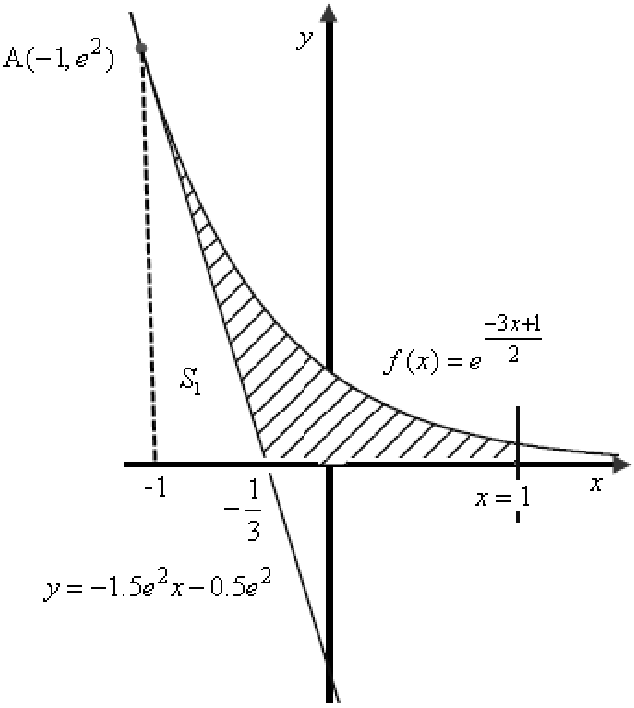
$$0.89M_0 = 1.4M_0 0.8608^t \quad / : 1.4M_0$$
$$0.6357 = 0.8608^t$$
$$\ln 0.6357 = \ln 0.8608^t$$
$$\ln 0.6357 = t \ln 0.8608$$
$$\frac{\ln 0.6357}{\ln 0.8608} = t$$
$$\boxed{t = 3.02}$$

כלומר לאחר קצת יותר מ- 3 **שנים, החל מינואר** 2005 **.**

תשובה: בשנת 2008 **הגיע ערך הקרקע ל-** 89% **מערכה בינואר** 2000 **.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. נמצא את שיעורי הנקודה A, ששיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=e^{\frac{-3x+1}{2}}$ העובר דרכה הוא $-\frac{3}{2}e^2$.



$$f'(x)=-\frac{3}{2}e^{\frac{-3x+1}{2}}$$

$$\cancel{-\frac{3}{2}}e^2=\cancel{-\frac{3}{2}}e^{\frac{-3x+1}{2}}$$

$$2=\frac{-3x+1}{2} \rightarrow 4=-3x+1 \rightarrow -3=-3x$$

$$x=-1 \rightarrow f(-1)=e^{\frac{-3(-1)+1}{2}}=e^2 \rightarrow \boxed{A(-1,e^2)}$$

תשובה: $A(-1,e^2)$.

ב. מציאת משוואת המשיק, בנקודה $A(-1,e^2)$, ושיפועו $-\frac{3}{2}e^2$:

$$y-e^2=-\frac{3}{2}e^2(x+1) \rightarrow \boxed{y=-1.5e^2x-0.5e^2}$$

תשובה: משוואת המשיק היא $y=-1.5e^2x-0.5e^2$

ג. נוריד אנך מנקודת ההשקה, ומחשב את השטח בין $f(x)=e^{\frac{-3x+1}{2}}$ לציר ה- x בגבולות $x=-1,1$

ונפחית ממנו את שטח המשולש מצד שמאל S_1

(ניתן גם להעלות אנך מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x, ולחשב שני שטחים נפרדים בעזרת אינטגרל).

השטח בין $f(x)=e^{\frac{-3x+1}{2}}$ לציר ה- x

בגבולות $x=-1,1$

$$S=\int_{-1}^{1}(e^{\frac{-3x+1}{2}}-0)dx$$

$$S=\frac{e^{\frac{-3x+1}{2}}}{\frac{-3}{2}}\Big]_{-1}^{1}$$

$$S=-\frac{2e^{\frac{-3\cdot1+1}{2}}}{3}-(-\frac{2e^{\frac{-3\cdot(-1)+1}{2}}}{3})$$

$$S=-\frac{2}{3e}+\frac{2e^2}{3}=4.6808$$

שטח המשולש S_1

מציאת נקודת החיתוך עם ציר ה - x

$$0=-1.5e^2x-0.5e^2 \quad /:e^2\neq0$$

$$0=-1.5x-0.5 \rightarrow x=-\frac{1}{3} \rightarrow (-\frac{1}{3},0)$$

חישוב שטח המשולש

$$S_1=\frac{(-\frac{1}{3}-(-1))\cdot e^2}{2}= \rightarrow S_1=\frac{\frac{2}{3}\cdot e^2}{2}$$

$$S_1=\frac{e^2}{3}=2.463$$

וגודל השטח המבוקש: $-\frac{2}{3e}+\frac{2e^2}{3}-\frac{e^2}{3}=\frac{e^2}{3}-\frac{2}{3e}$ $(4.6808-2.463=2.2178)$

תשובה: $\frac{e^2}{3}-\frac{2}{3e}$ **יח"ר (או** 2.2178 **יח"ר).**

א. נתונה הפונקציה $y=\frac{x^2-3}{(x+1)^2}$ **.**

(1) הביטוי שבמכנה $(x+1)^2$ **מתאפס עבור** $x=-1$ **ולכן הפונקציה מוגדרת לכל** $x\neq-1$ **.**

תשובה: $x\neq-1$ **.**

(2) נמצא אסימפטוטה אופקית - חזקת פולינום המונה (2) **שווה לחזקת פולינום המכנה** (2)

ולכן הביטוי $\frac{x^2-3}{(x+1)^2}$ **שואף ל-** 1 **כאשר** $x\to\infty$ **ובהתאם ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית .**

אסימפטוטה אנכית - $x=-1$ **מאפס מכנה ולא מונה,**

ולכן הביטוי $\frac{x^2-3}{(x+1)^2}$ **שואף ל-** $-\infty$ **כאשר** $x\to-1$ **ובהתאם** $x=-1$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=1$ **,** $x=-1$ **.**

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ולכן:**

$$0=\frac{x^2-3}{(x+1)^2}$$

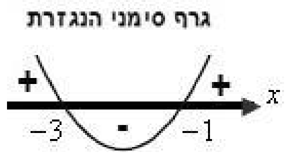
$$0=x^2-3\quad\to x=\pm\sqrt{3}\quad\to\boxed{(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},0)}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן:**

$$f(0)=\frac{0^2-3}{(0+1)^2}=-3\quad\to\boxed{(0,-3)}$$

תשובה: $(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},0)$ **,** $(0,-3)$ **.**

(4) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה ואת סוגה.



$$f'(x)=\frac{2x(x+1)^2-2(x+1)(x^2-3)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)(x(x+1)-(x^2-3))}{(x+1)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x+1)(x+3)}{(x+1)^4}}$$

הנגזרת מתאפסת עבור $x=-3$ **(**$x=-1$ **לא בתחום ההגדרה), כאשר מכנה הנגזרת חיובי ועל פי גרף סימני הנגזרת משמאל. עבור** $x=-3$ **נגזרת הפונקציה עוברת מחיוביות לשליליות, והפונקציה עוברת מעלייה לירידה**

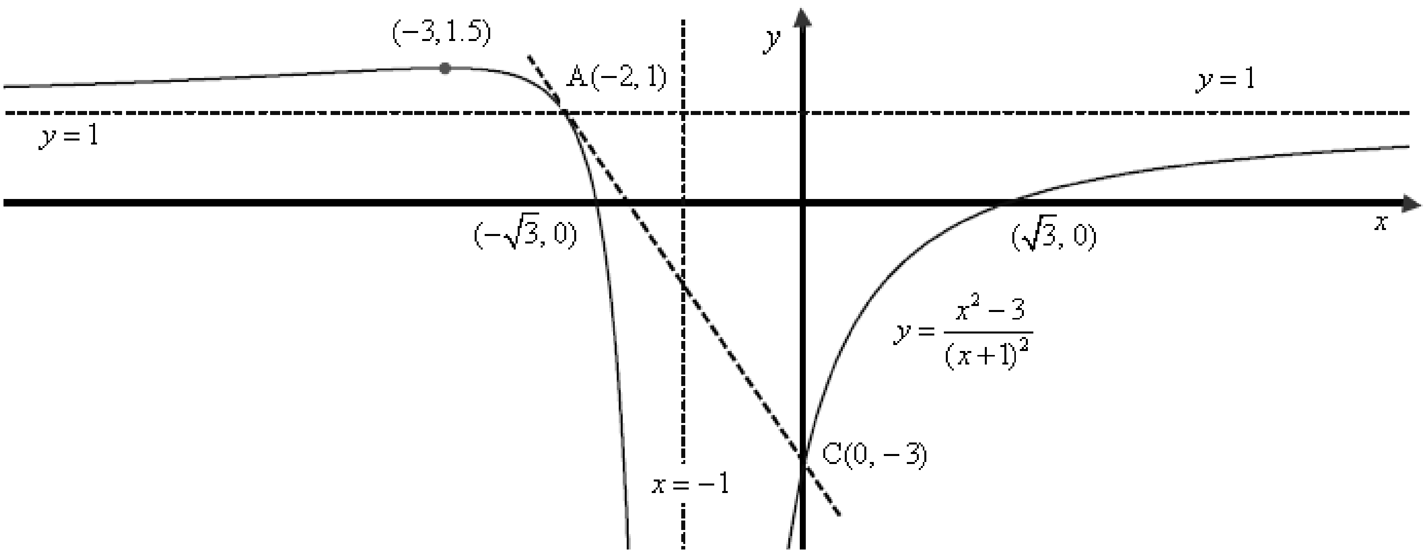
וזו נקודת מקסימום. $f(-3)=\frac{(-3)^2-3}{(-3+1)^2}=1.5\quad\to\boxed{(-3,1.5)}$

תשובה: תשובה: $(-3,1.5)$ **מקסימום.**

(5) תחום עלייה וירידה בהתאם לגרף סימני הנגזרת

תשובה:עלייה: $x>-1$ **או** $x<-3$ **ירידה** $-3<x<-1$ **.**

ב. הסקיצה המתאימה (כולל הנדרש לסעיף ג)



ג. נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין הפונקציה $y=\frac{x^2-3}{(x+1)^2}$ **לאסימפטוטה האופקית** $y=1$

$$1=\frac{x^2-3}{(x+1)^2}$$
$$x^2+2x+1=x^2-3$$
$$x=-2 \quad \rightarrow \boxed{A(-2,1)}$$

נמצא את שיפוע הישר בין $C(0,-3)$ **ל-** $A(-2,1)$ **:** $m_{AC}=\frac{-3-1}{0-(-2)}=-2$

נמצא את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה $A(-3,1$ **:** $f'(-2)=\frac{2(-2+1)(-2+3)}{(-2+1)^2}=-2$ **.**

בהתאם ערך הנגזרת שווה לשיפוע המיתר AC **ולכן** AC **משיק לגרף הפונקציה בנקודה** A **.**

תשובה: הוּכַח.

נכתב ע"י עפר ילין