א. יש להראות כי לכל ערך של m גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+2mx-(2m^2+1)$ נמצא כולו מתחת לציר ה- x .

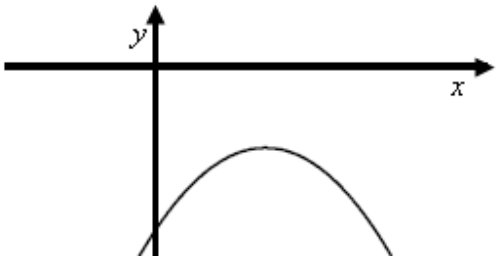
$a=-1 \quad b=2m \quad c=-(2m^2+1)$

זו הפרבולה (פונקציה ממעלה שנייה)

בעלת מינימום, כיוון ש: $a=-1<0$

נדרש: $\Delta<0$ **(** 0 **נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **)**

יש להראות כי $\Delta<0$ **לכל** m



$\underline{\Delta<0}$

$$\Delta=b^2-4ac<0$$
$$(2m)^2-4(-1)\cdot(-(2m^2+1))<0 \quad \rightarrow 4m^2-4(2m^2+1)<0$$
$$4m^2-8m^2-4<0 \quad \rightarrow -4m^2-4<0$$

קבלנו ביטוי אלגברי שהוא שלילי לכל m **ולכן** $\Delta<0$ **לכל** m **,**

וגרף הפונקציה $f(x)$ **כולו מתחת לציר ה-** x **.**

ב.כאשר נתונות הפונקציות $f(x)=-x^2+2mx-(2m^2+1)$ **ו-** $g(x)=(m^2-4)x^2-2(m-2)x-3$ **.**

יש למצוא לאילו ערכים של m **גרף הפונקציה** $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ **, נמצא כולו מעל ציר ה-** x **.**

כיוון שבסעיף א' הראינו כי $f(x)<0$ **לכל** x **, עבור כל** m **.**

הרי שיש למצוא לאילו ערכים של m **גרף הפונקציה** $g(x)$ **, נמצא כולו מתחת לציר ה-** x **,**

ואז $h(x)$ **תהייה פונקציה חיובית (מכפלה של שתי הפונקציות שליליות).**

<u>מקרה הישר</u>

כאשר $a=0$ **נקבל** $m=2$ **או** $m=-2$

נציב $m=2$ **ונקבל** $g(x)=-3$ **שלילי לכל** x

נציב $m=2$ **ונקבל** $g(x)=8x-3$ **שאינו שלילי לכל** x

לכן $\boxed{m=2}$ **הינו בתחום האמת של הפתרון לבעיה.**

<u>מקרה הפרבולה</u> $a=(m^2-4) \quad b=-2(m-2) \quad c=-3$

$\underline{\Delta<0}$

$(-2(m-2))^2-4(m^2-4)\cdot(-3)<0$

$4(m-2)^2+12(m+2)(m-2)<0 \quad \to 4(m-2)(m-2+3(m+2)<0$

$4(m-2)(m-2+3m+6)<0 \quad \to 4(m-2)(4m+4)<0$

$m=2,\ m=-1$

זו פרבולה בעלת מינימום ובהתאם $-1<m<2$

$\underline{a<0}$

$m^2-4<0$

$(m-2)(m+2)<0$

$m=2,\ m=-2$

זו פרבולה בעלת מינימום

ובהתאם $-2<m<2$

חיתוך של התנאים הנדרשים במקרה של פרבולה $\boxed{-1<m<2}$

לאחר איחוד של הפתרונות (מקרה הישר ומקרה הפרבולה) נקבל $-1<m\le 2$

תשובה: $-1<m\le 2$

א. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = k \\ a_{n+1} = (n+1)(a_n+1) \end{cases}$$

נמצא את a_2 ו- a_3 באמצעות כלל הנסיגה:

$$a_{n+1} = (n+1)(a_n+1) \qquad \boxed{a_1 = k}$$

$$(n=1) \quad a_2 = (1+1)(a_1+1) = 2\cdot(k+1) \qquad \boxed{a_2 = 2k+2}$$

$$(n=2) \quad a_3 = (2+1)(a_2+1) = 3\cdot(2k+2+1) \qquad \boxed{a_3 = 6k+9}$$

תשובה: $a_2 = 2k+2$, $a_3 = 6k+9$

ב. נתונה סדרה חשבונית, המוגדרת לפי מקום, $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n+1}$

(1) $b_1 = \dfrac{a_2}{a_1+1} = \dfrac{2k+2}{k+1} = \dfrac{2(k+1)}{k+1} = 2$

תשובה: $b_1 = 2$

(1) <u>כיוון שנתון</u> כי b_n היא סדרה חשבונית, הרי ש: $d_b = b_2 - b_1$

$$b_2 = \frac{a_3}{a_2+1} = \frac{6k+9}{2k+2+1} = \frac{3(2k+3)}{2k+3} = 3$$

$$d_b = b_2 - b_1 = 3-2 = 1$$

תשובה: $d_b = 1$

ג. נתון כי סכום שלושת האיברים הראשונים של הסדרה a_n קטן ב- 39

מסכום 11 **האיברים הראשונים של הסדרה** b_n.

המשוואה המתאימה: $a_1 + a_2 + a_3 + 39 = S_{11}^b$

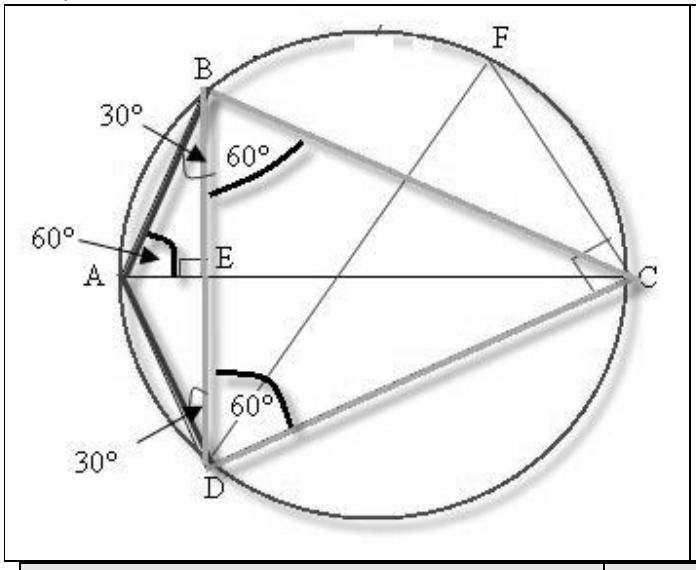
$$k + 2k + 2 + 6k + 9 + 39 = \frac{11}{2}\cdot(2\cdot 2 + 1(11-1))$$

$$9k + 50 = 77$$

$$9k = 27$$

$$\boxed{k = 3}$$

תשובה: $k = 3$



נתונים

1. $ABCD$ **דלתון**

2 . AC **אלכסון ראשי בדלתון**

3. $CD = BD$

4. $AD = 2AE$

עבור ב

5. DF **קוטר במעגל**

צ"ל: א. $ABCD$ **בר חסימה**

ב. $\Delta EAB : \Delta CFD$

הוכחה

הסבר		טענה	נימוק
1	6	$ABCD$ **דלתון**	**נתון**
2	7	AC **אלכסון ראשי בדלתון**	**נתון**
7 ,6	8	$AB = AD, \quad CB = CD$	**האלכסון הראשי מחבר את זוויות הראש**
9 ,8	9	$CD = BD$	**נתון**
9 ,8 ,7	10	$CD = BD = CB$	**כלל מעבר**
10	11	$\angle BDC = \angle BCD = \angle DBC = 60°$	**זוויות שוות במש"ץ, סכום זוויות** $180°$
6	12	$\angle BEA = 90°$	**אלכסוני הדלתון ניצבים זה לזה**
4	13	$AD = 2AE$	**נתון**
13 ,12	14	$\angle ABE = 30°$	**אם ניצב שווה למחצית היתר** (ΔABE) **אז הזווית מולו שווה ל-** $30°$
15 ,11	15	$\angle ABC = 90°$	**סכום זוויות**
6	16	$\angle ABC = \angle ADC$	**זוויות בסיס שוות בדלתון**
16 ,15	17	$\angle ADC = 90°$	**כלל מעבר**
17 ,15	18	$ABCD$ **בר חסימה**	**סכום זוויות נגדיות** $180°$
		מ.ש.ל. א	
5	19	DF **קוטר במעגל**	**נתון**
19	20	$\angle FCD = 90°$	**זוויות היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה**
20 ,12	21	$\angle FCD = \angle BEA$ **(ז)**	**כלל המעבר**
20 ,14	22	$\angle BAE = 60°$	**סכום זוויות** ΔABE **הוא** $180°$
11	23	$\angle DFC = \angle DBC = 60°$	**זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות**
23 ,22	24	$\angle CFD = \angle BAE$ **(ז)**	**כלל המעבר**

הסבר		טענה	נימוק
24 ,21	25	$\Delta CFD : \Delta EAB$	משפט דמיון ז. ז.
מ.ש.ל. ב			

נתונים

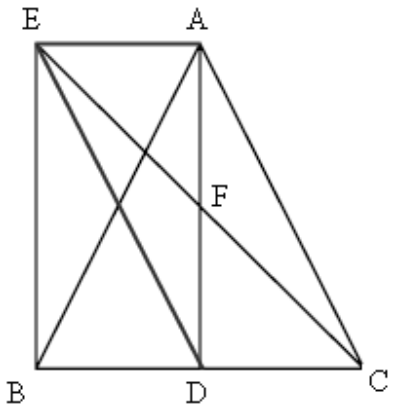
1. $AB = AC$
2. $AD \perp BC\ (\angle ADB = \angle ADC = 90°)$
3. $BE \perp BC\ (\angle EBD = 90°)$

עבור ב

4. $ED = AC$

צ"ל: א. $EF = FC$

ב. המרובע $ACDE$ **הוא מקבילית**



הוכחה

הסבר		טענה	נימוק
1	5	$AB = AC$	נתון
2	6	$\angle ADC = 90°$	נתון
6 ,5	7	D **אמצע** BC	הגובה לבסיס במש"ש הוא גם תיכון
3	8	$\angle EBD = 90°$	נתון
8 ,6	9	$\angle EBD = \angle ADC$	כלל המעבר
9 ,8 ,7	10	$EB \parallel AD$	אם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים
10 ,7	11	DF **קטע אמצעים במשולש** EBC	יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע שממול
11	12	$EF = FC$ **(צ)**	קטע אמצעים חוצה את שתי הצלעות
מ.ש.ל. א			
4	13	$ED = AC$ **(צ)**	נתון
	14	$\angle EFD = \angle AFC$ **(ז)**	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
6	15	$\angle EFD, \angle AFC > 90°$	זווית חיצונית גדולה מזווית פנימית שלא צמודה לה (ΔFDC)
15	16	$ED > DF, AC > AF$	מול זווית גדולה מונחת צלע גדולה $(\Delta EDF, \Delta CAF)$
16 ,14 ,13 ,12	17	$\Delta EDF \cong \Delta CAF$	משפט חפיפה צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה מבין שתי הצלעות הנתונות
17	18	$EA = DC$	צלעות מתאימות במשולשים חופפים
18 ,13	19	המרובע $ACDE$ הוא מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות שוות
מ.ש.ל. ב			

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- הקבוצה ניצחה במשחק**

$\overline{A}$ **- הקבוצה הפסידה במשחק**

B **- הקבוצה הובילה בסוף המחצית הראשונה**

$\overline{B}$ **- הקבוצה לא הובילה בסוף המחצית הראשונה**

<u>נתונים ומשמעויות</u>

$$P(A)=0.8 \quad \rightarrow P(\overline{A})=0.2$$

$$P(B)=0.7 \quad \rightarrow P(\overline{B})=0.3$$

$$P(B\cap\overline{A})=0.05$$

נציב הנתונים בטבלה דו-ממדית ונשלים את הטבלה

	A **תנצח**	$\overline{A}$ **תפסיד**	
B **תוביל במחצית**	0.65	0.05	0.7
$\overline{B}$ **לא תוביל במחצית**	0.15	0.15	0.3
	0.8	0.2	1

ניתן לראות כי $P(A\cap\overline{B})=P(A\cap\overline{B})$, **ולכן ההסתברות לא להוביל בסוף המחצית הראשונה ולנצח המשחק שווה להסתברות לא להוביל בסוף המחצית הראשונה ולהפסיד במשחק.**

ב. יש למצוא את ההסתברות של הובלה בסוף המחצית הראשונה אם ידוע כי הקבוצה הפסידה במשחק

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B/\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0.05}{0.2}=0.25$$

תשובה: ההסתברות להוביל בסוף המחצית הראשונה, אם ידוע כי הקבוצה הפסידה, היא 0.25 **.**

ג. יש למצוא את ההסתברות להוביל ב- 0 **,** 1 **או** 2 **משחקים – מבין** 5 **משחקים, בהם הקבוצה הפסידה.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי את ההסתברויות המתאימות:

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=3$, $p=0.25$ **(על-פי סעיף ב)** ,

$$P_5(0)=\binom{5}{0}(0.25)^0(1-0.25)^{5-0}=1\cdot(0.25)^0\cdot(0.75)^5=0.2373$$

$$P_5(1)=\binom{5}{1}(0.25)^1(1-0.25)^{5-1}=5\cdot(0.25)^1\cdot(0.75)^4=0.3955$$

$$P_5(2)=\binom{5}{2}(0.25)^2(1-0.25)^{5-2}=10\cdot(0.25)^2\cdot(0.75)^3=0.2637$$

$P($ **לכל היותר הובילה בשני משחקים מתוך חמישה** $)=0.2373+0.3955+0.2637=0.8965$

תשובה: ההסתברות שלכל היותר בשניים מהמשחקים הקבוצה הובילה בסוף המחצית הראשונה, אם ידוע כי הפסידה במשחק, היא 0.8965**.**

א. נגדיר את הקבוצות הבאות:

S - **קבוצת השעונים**

A **- קבוצת השעונים שיוצרו במפעל א'** $\overline{A}$ **- קבוצת השעונים שיוצרו במפעל ב'**

B **- קבוצת השעונים שנשברו בהובלה** $\overline{B}$ **- קבוצת השעונים שלא נשברו בהובלה**

<u>נתונים ומשמעויות מיידיות</u>

$$P(A)=0.45 \quad \rightarrow P(\overline{A})=0.55$$

$$P(\overline{B}/\overline{A})=0.72 \quad \rightarrow P(B/\overline{A})=0.28$$

$$P(A/B)=0.2 \quad \rightarrow P(\overline{A}/\overline{B})=0.8$$

<u>פיתוח נוסחאות פרופורציה מותנית</u>

$$P(\overline{B}/\overline{A})=0.72$$

$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{B}\ \mathbf{I}\ \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.72=\frac{P(B\ \mathbf{I}\ \overline{A})}{0.55}$$

$$P(B\ \mathbf{I}\ \overline{A})=0.396$$

$$P(\overline{A}/B)=0.8$$

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\ \mathbf{I}\ B)}{P(B)}$$

$$0.8=\frac{0.154}{P(B)}$$

$$P(B)=0.1925$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים.

	A **מפעל א'**	$\overline{A}$ **מפעל ב'**	
B **- נשברו**	0.0385	0.154	0.1925
$\overline{B}$ **- לא נשברו**	0.4115	0.396	0.8075
	0.45	0.55	1

$$P(\overline{B}/A)=\frac{P(\overline{B}\ \mathbf{I}\ A)}{P(A)}=\frac{0.4155}{0.45}=0.9144=91.44\%$$

תשובה: **פרופורציית השעונים שעמדו בהובלה מבין השעונים מתוצרת מפעל א' היא** $0.9144=91.44\%$

ב. $P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\ \mathbf{I}\ \overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.396}{0.8075}=0.4904=49.04\%$

תשובה: **פרופורציית השעונים ממפעל ב' מבין השעונים שעמדו בהובלה היא** $0.4904=49.04\%$

ג. $P(\overline{B}/A)=0.9144\neq P(\overline{B}/\overline{A})=0.72$ **, כלומר קיים קשר סטטיסטי**

שיעור השעונים שעמדו בהובלה בקו ב' המיוצרים במפעל א', גדול מבין אלו המיוצרים במפעל ב'
ולכן קיים קשר סטטיסטי.

ד. תשובה: <u>לדוגמה</u>: אופן אריזת השעונים על ידי חברת ההובלה (אריזה שונה לכל סוג שעון).