פעילויות בלוח הכפל

לכיתות ג-ו

לוח הכפל הוא מכשיר יעיל להשגרת מיומנויות הכפל בכיתות הנמוכות. הצלחת המורה במשימה זו נמדדת במידה שתלמידיה חדלים להסתייע בו. דבר זה מוצדק אם נראה בלוח אך ורק מכשיר לשליטה במנויות הכפל. גישה כזו מתעלמת מאפשרויות ההסתייעות בלוח כחומר לימודי בפני עצמו, מלבד משימתו העיקרית והחשובה.

הפעילויות הבאות נועדו לסייע למורה בכיתות ג-ו לנצל את לוח הכפל להמחשת מושגים בסיסיים שונים במתמטיקה.

המורה יכול להוסיף, להשמיט, לשנות, ללמד את כל החומר או את חלקו, בצורה מרוכזת או לפרוש אותו לכמה שנות לימוד. חלק מהחומר מתאים לתלמידים מן השורה, וחלקו - לתלמידים מצטיינים וסקרנים במיוחד.

בקיצור, מוצג כאן חומר שממתין ליד היוצר, ותקוותי שהוא אכן יועיל וינוצל. כל תגובה תתקבל בברכה

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

כרטיס מס׳ 1

התבונן בלוח הכפל: בטורים, בשורות ובאלכסונים ורשום את התופעות שנראות לך מעניינות במיוחד. למשל, השורה העליונה מורכבת כולה מאפסים וכן הטור הראשון משמאל. רשום עוד תופעות ראויות לציון:

1.

2.

3.

4.

5.

לאחר שרשמת את מרב התופעות, קח את כרטיס מס' 2, וענה על השאלות.

<u>כרטיס מס' 2</u>

1. השורה העליונה בלוח והטור השמאלי שלו מורכבים מאפסים בלבד. מהו הכלל שאנו למדים לגבי כפל באפס?

- הכלל: <u>כל מספר</u>, אם מכפילים אותו באפס, התוצאה של הכפל תהיה תמיד אפס.

לאחר שלמדנו כלל זה, לא יהיה צורך עוד להשתמש בשורה זאת ובטור זה. על כן, מעתה אנו נתעלם מהם, ולא נמספר אותם בהמשך. מעתה כשורה ראשונה שלנו ייחשב הטור שבראשו נמצא המספר 1, והשני – הטור שבראשו נמצא המספר 2, וכן הלאה. כך ננהג גם לגבי השורות.

- מה תוכל לומר על השורה הראשונה מלמעלה ועל הטור הראשון משמאל? מהו הכלל? כל אחד מהם כולל את המספרים מ-1 עד 10, כך שאם בוחרים מספר כלשהו משורה זאת ומכפילים אותו במספר כלשהו מטור זה, נקבל את תוצאת הכפל (שנקרא לה להלן: <u>המכפלה</u>) במשבצת ההצטלבות של הטור והשורה של שני המספרים שבחרנו.
- אם נבחר, למשל, את המספר 6 מהשורה הראשונה ונכפיל אותו במספר 9 מהטור הראשון, משבצת ההצטלבות שלהם תהיה 54. המכפלה של 6x9 היא, אפוא, 54.
- אפשר לומר שהמספרים בשורה הראשונה ובטור הראשון הם "אבני היסוד" של לוח הכפל. אִתם נעבוד כאשר נרצה לדעת את המכפלה של שני מספרים בלוח הכפל <u>הזה</u>.

2. התבונן בטורים הזוגיים, וכן בשורות הזוגיות – מה תוכל לומר על תכונתם של המספרים בתוכם? מהו הכלל?

- כל מספר זוגי, אם מכפילים אותו במספר כלשהו, זוגי או אי-זוגי, המכפלה תהיה <u>תמיד</u> מספר זוגי.

ניקח לדוגמה טור זוגי כלשהו, נאמר טור שבראשו המספר 6. אם נכפיל אותו ב-4, שהוא מספר זוגי, נקבל את המספר 24, שגם הוא מספר זוגי. אבל גם אם נכפיל אותו ב-7, שהוא מספר אי-זוגי, נקבל את המספר 42, שהוא מספר זוגי.

[תלמידים יכולים לתרגל עניין זה תוך כדי התבוננות והסתייעות בלוח הכפל, ואז ייווכחו שהכלל נכון. אחרי זה אפשר לבחור שני תלמידים שאחד מהם יבחר רק מספרים זוגיים והשני יבחר כל מספר שהוא רוצה, וכלל התלמידים ישתתפו בחישוב המכפלה. כל זה נעשה כדי לבסס את הכלל החשוב הזה]

3. התבונן בטורים האי-זוגיים (הטורים שמספרם 1, 3, 5, 7 ו-9), וכן בשורות האי-זוגיות. מהי תכונתם של המספרים המופיעים בהם? האם הם מסודרים בסדר מסוים? האם תוכל לנסח את הכלל?
   - הטורים והשורות האלה מכילים גם מספרים זוגיים וגם מספרים אי-זוגיים. שני סוגי המספרים האלה מתחלפים <u>לסירוגין</u>: פעם מספר אי-זוגי ואחריו מספר זוגי, ושוב מספר אי-זוגי ואחריו מספר זוגי, וכן הלאה.

הכלל הוא: כאשר מכפילים מספר זוגי במספר זוגי או במספר אי-זוגי – התוצאה תהיה תמיד מספר זוגי. זאת למדנו בשאלה הקודמת; אבל אם מכפילים מספר אי-זוגי במספר אי-זוגי, התוצאה תהיה <u>תמיד</u> מספר אי-זוגי.

<u>כרטיס מס' 3</u>

1. כרטיס זה מסכם את מה שלמדנו בשני הכרטיסים הקודמים. מלא את החסר במשפטים הבאים:
   כל מספר שמכפילים אותו ב_אפס____, המכפלה תהיה תמיד אפס.
2. כל מספר שמכפילים אותו ב-1, המכפלה תהיה תמיד _אותו_ המספר .כל מספר שמכפילים אותו במספר זוגי, המכפלה תהיה תמיד מספר __זוגי__.
3. כל מספר אי-זוגי שמכפילים אותו במספר _זוגי_, המכפלה תהיה מספר זוגי; וכל מספר אי-זוגי שמכפילים אותו במספר _אי-זוגי_, המכפלה תהיה מספר אי-זוגי.
4. אם הבנת היטב את מה שעשית עד עכשיו, אני בטוח/ה שתוכל למלא בהצלחה את לוח הכפל המיוחד הבא. הוא מיוחד, כיוון שיש בו רק שני סוגי מספרים: זוגיים ואי-זוגיים:

X	זוגי	אי-זוגי
זוגי	זוגי	זוגי
אי-זוגי	זוגי	אי-זוגי

<u>כרטיס מס׳ 4</u>

1. התבונן בלוח הכפל שלפניך. האם כל המספרים מ-1 עד 100 מצויים בו? האם חסרים מספרים? מה, למשל? נסה לנחש כמה מספרים חסרים: 10? אולי 20? 30? 40? 50? אולי יותר? נראה שהתשובה תפתיע אותך.
   - אכן חסרים בלוח יותר מ-50 מספרים.
2. נחש גם כמה מספרים מופיעים רק פעם אחת. יותר מ-10 מספרים? פחות?
   - פחות מ-10.
3. כמה מספרים מופיעים פעמיים? כמה - 3 פעמים? כמה - 4 פעמים? [הילדים ינחשו מספרים שונים. המטרה לעורר את סקרנותם. יהיו ילדים שכבר יתחילו לספור. הוויכוחים שביניהם, יובילו אותנו לשאלה הבאה:]
4. די לנו בניחושים. כדי לדעת לענות בדיוק על השאלות האלה, יש צורך לספור. אנחנו נעשה זאת בצורה מסודרת שתיתן לנו תמונה מלאה של המצב. נבנה טבלה שבאמצעותה נוכל לרכז את כל הנתונים:

א	ב	ג
מס' ההופעות	כמה מספרים	מה הם המספרים
0	58	11, 13, 17, 19, 22, 23, 26, 29, 31, 33, 34, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 46, 47, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99
1	6	1, 25, 49, 64, 81, 100
2	23	2, 3, 5, 7, 14, 15, 21, 27, 28, 32, 35, 42, 45, 48, 50, 54, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 90
3	4	4, 9, 16, 36
4	9	6, 8, 10, 12, 18, 20, 24, 30, 40

<u>כרטיס מס' 5</u>

[הילדים עבדו ומילאו כמיטב יכולתם את הטבלה בכרטיס מס' 4. יהיו בוודאי הרבה טעויות אצל ילדים לא מעטים. יש צורך בבדיקה משותפת. בדיקה זו תיעשה על ידי מילוי המקומות החסרים בשאלון הבא :]

1. כפי שראינו בטבלה שבכרטיס 4, מספר המספרים החסרים בלוח הכפל של 10X10 הוא __58__. נסה למיין את המספרים האלה לשני סוגים : כמה מספרים זוגיים יש ביניהם?

- __22__ .

כמה מספרים אי-זוגיים?
- __36__ .

יש לכך סיבה, אבל אנו נגלה אותה מאוחר יותר.

2. סך כל המספרים <u>השונים</u> שמופיעים בלוח הכפל הזה הוא __42__. איך נדע זאת מבלי לספור מחדש? [נתון זה אינו מופיע בטבלה]. בלוח הכפל יש __100__ משבצות. מספר

המספרים החסרים בו לפי הטבלה הוא _58__. יוצא שהמספרים השונים המופיעים בטבלה הוא 42=58-__100__.

אם יש בלוח 42 מספרים שונים המפוזרים בתוך 100 משבצות, הרי ברור שיש כמה מספרים מאלה המופיעים כמה פעמים. הטבלה מראה כמה פעמים מופיע כל מספר מאלה.

3. סך כל המספרים המופיעים בעמודה ג צריך להיות 100. כדי להיות בטוחים שכל המספרים רשומים, נוכל לספור כל מספר ומספר עד שנגיע למספר 100. אבל קיימת דרך בדיקה נוספת שתיקח בחשבון את מה שרשום בעמודות א ו-ב. אם נכפיל כל מספר המופיע בעמודה א במספר המקביל לו המופיע בעמודה ב ונסכם את המכפלות, התוצאה צריכה להיות __100__. כך:

0X58 = _0__
1X__6__ = _6__
2X__23__=__46__
3X__4__=__12__
4X__9__= _ 36_

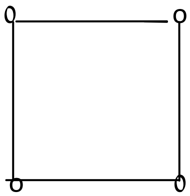
סך הכול ___100___

הסתכל על ארבעת המספרים בשורה 3 בטבלה. חפש אותם בלוח הכפל. האם אתה רואה שהם מסודרים בצורה מיוחדת?

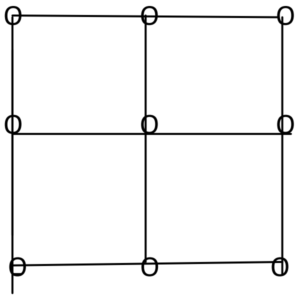
- הם מסודרים ב__אלכסון___. כל מספר באלכסון הוא מקום הצטלבות של שני מספרים.
- מה המיוחד בשני מספרים אלה?
- שני מספרים אלה הם מספרים __זהים__.

4. כאשר מספר מסוים הוא מכפלה של שני מספרים זהים, אנו קוראים למספר כזה <u>מספר ריבועי</u>. למה הוא נקרא כך? מה הקשר בין מספר כזה לריבוע?

ובכן, אם נדמיין לעצמנו שכל מספר מורכב ממספר נקודות באותה כמות ששם המספר מציין, הרי שאת הנקודות במספר הריבועי אפשר לסדר בצורת ריבוע:



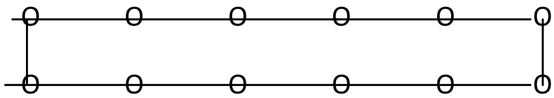
המספר 4



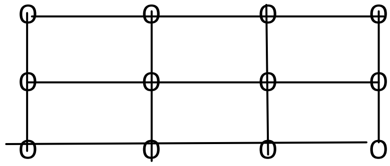
המספר 9

רק מספרים כאלה אפשר לסדרם בצורת ריבוע. את המספר 8, למשל, לא נוכל לסדר בצורת ריבוע, וכן לא המספר 12.

את המספר 12 אפשר לסדר בצורה הבאה:



או בצורה זאת:



המספר 12

אם תרצה לקרוא להם מספרים מלבניים – הדבר אפשרי בהחלט.

בשפת המתמטיקה היה צורך בסימון מיוחד למספר שמכפילים אותו בעצמו. סימון זה הוא ספרה 2 קטנה מעל ומימין למספר שמכפילים בעצמו, והפעולה נקראת "העלאה בריבוע", כך:

$4^2 = 4x4=16$ (ארבע בריבוע שווה 4 כפול 4 וזה שווה 16)

5. האם יש עוד מספרים ריבועיים בלוח הכפל הזה? איפה הם צריכים להיות ממוקמים בלוח הכפל?

- כמובן, על אותו __אלכסון__ שעליו הופיעה קבוצת המספרים הריבועיים הראשונה, ומאותה סיבה שפירטנו בסעיף 4.

נרשום אותם כפי שהם מופיעים שם:

__1__, __25__, __36__, __49__, __64__, __81__, __100__

נעזוב, לפי שעה, את הטבלה ונתרכז בחקירותינו בלוח הכפל עצמו. נעבור לכרטיס מס' 6

<u>כרטיס מס' 6</u>

נתבונן בטורים של לוח הכפל:

1. הטור העשירי מורכב מהכפולות של __10__. מה המיוחד בכפולות של 10?

- בכולן הוספנו את הספרה __0__ לימין המספר שהכפלנו אותו ב-10 (מספר השורה). ובכן, הכלל לכפל במספר 10 הוא פשוט להוסיף __0 __לימין המספר – כל מספר, גם אם הוא מספר גדול מאוד.

2. הטור החמישי מורכב מהכפולות של _5_ . מה המיוחד בכפולות של 5? כולן מסתיימות או ב _5_ או ב_0_ ועכשיו נתבונן היטב בלוח וננסה לענות: מתי מסתיימת המכפלה ב-0 ומתי היא מסתיימת ב-5? מהו הכלל? ננסח אותו: אם מכפילים מספר __זוגי__ ב-5, אזי המכפלה מסתיימת ב__0__, ואם מכפילים מספר אי-זוגי ב-5, אזי המכפלה מסתיימת ב__5__.

3. הטור המעניין ביותר בלוח הוא טור מס' 9 – טור הכפולות של 9. מה הן התופעות שמושכות את עיניך? נרשום אותן:

- טור האחדות במספרים אלה מכיל את כל הספרות מ __0__ עד __9__, והן רשומות לפי הסדר מ_למטה__ עד _למעלה__

- גם טור העשרות באותם מספרים מכיל את כל עשר הספרות מ_0_ עד _9_, אבל הן רשומות לפי הסדר _מלמעלה__ עד __למטה__ (את הספרה 9 למעלה אפשר לרשום 09)

- יוצא מהסעיפים הקודמים שסכום הספרות של כל מספר בטור זה הוא __9__. מהו הכלל המסתמן מתופעה זו: כל מספר שמכפילים אותו ב-9, סכום הספרות של המכפלה שלו הוא_ 9__ או הכפולות של 9. כדי לבדוק אם הכלל הזה הוא נכון תמיד, יש צורך להכפיל מספרים גדולים יותר ב-9, ולסכם את ספרותיהם.

4. במה דומה טור 7 לטור 9 מבחינת הספרות המופיעות באחדות? גם כאן מופיעות כל הספרות מ__0__ ועד __9__, אבל הן לא מופיעות לפי הסדר.

5. בטורים 2, 4, 6, 8 מופיעים באחדות רק הספרה 0 והספרות הזוגיות, והן מופיעות במחזורית בכל אחד מהטורים האלה. נרשום את חמש הספרות המופיעות במחזוריות בכל אחד מהטורים האלה:

   בטור 2 המחזוריות היא: 2, 4, 6, 8, 0, 2,.....
   בטור 8 המחזוריות היא: 8, 6, 4, 2, 0, 8,.....

   בטור 4 המחזוריות היא: 4, 8, 2, 6, 0, 4....
   בטור 6 המחזוריות היא: 6, 2, 8, 4, 0, 6....

   אנו רואים שהמחזוריות של המספרים בטור 8 הולכת בכיוון הפוך למחזוריות של המספרים בטור 2. יוצא מזה שהספרות המקבילות בכל אחד משני הטורים האלה מסתכמות במספר __10__.

   האם קיימת תופעה דומה במחזוריות של המספרים בטורים 4 ו-6?
   – אותה התופעה קיימת גם בשני טורים אלה.

6. ומה עם הטורים 7 ו-3? האם גם שם יש מחזוריות בספרות של האחדות? אם כן, כמה ספרות משתתפות בכל מחזור?
– __עשר__ ספרות.

כדי לדעת שאכן קיימת מחזוריות של עשר ספרות, עלינו להמשיך את לוח הכפל מעבר לעשר שורות ועשרה טורים, ואז להכפיל את המספרים: 11, 12, 13, ... ב-7. אם נראה שהמספרים 7, 4, 1,....יחזרו על עצמם, סימן שהמחזוריות מתקיימת. באותה דרך ננהג גם בטור 3 ונבדוק אם גם כאן מתקיימת המחזוריות בספרת האחדות.
ולא רק זאת, אלא שהספרות המקבילות במחזוריות האחדות של שני הטורים האלה מסתכמים גם הם ב-__10__, כפי שראינו בסעיף 5 לגבי הטורים 2 ו-8 והטורים 4 ו-6.

<u>כרטיס מס׳ 7</u>

בכרטיס מס׳ 6 התבוננו בטורים של לוח הכפל. עתה נתבונן גם בשורות:

1. השווה את המספרים שבטור השלישי, למשל, למספרים שבשורה השלישית. מה מצאת?

= המספרים מסודרים בדיוק באותו הסדר.

2. השווה גם את המספרים שבטור השביעי לאלה שבשורה השביעית, וכך לגבי שאר השורות והטורים המתאימים. מה מצאת?

- בכל שורה נתונה מסודרים המספרים באותו הסדר שבו מסודרים המספרים בטור המתאים לה.

3. מה זה אומר על לוח הכפל בכללו? איך נכנה את התכונה שגילינו בסעיף הקודם?

- התכונה הבסיסית של לוח הכפל היא <u>הסימטריות</u> שלו.
- מה פירוש הדבר שהלוח הוא סימטרי?
- פירושו שמספרים בחלק אחד של הלוח "משקפים" את המספרים בחלק השני שלו, כאילו הייתה מוצבת מראה בין שני החלקים.

4. אבל איפה עלינו להציב את המראה כדי לעמוד על תופעת הסימטריה? במילים אחרות, איפה עובר הגבול בין שני חלקי הלוח. נקדים ונאמר שגבול כזה נקרא <u>ציר הסימטריה.</u> ובכן איפה עובר ציר הסימטריה של הלוח? מי שיתבונן היטב בלוח יראה שציר הסימטריה עובר באלכסון המחבר בין המספר 1 למספר 100. זהו הקו שעליו מסודרים כל המספרים הריבועיים, כפי שלמדנו בסעיף 5 של כרטיס מס׳ 5.

5. האם קיימת הוכחה חותכת שזה אכן ציר הסימטריה של הלוח?

- נוכיח זאת על ידי קיפול הלוח לאורך ציר הסימטריה. בעקבות הקיפול ייווצרו שני משולשים חופפים (זאת אומרת, מתאימים בגודלם ומכסים בדיוק זה את זה). לאחר מכן נדקור בסיכה שתיים-שלוש משבצות. נפרוש שוב את הלוח ונבדוק באילו מספרים עברה הסיכה. מה מצאת?

- הסיכה פגעה במספרים זהים.

- האם יש עוד ציר סימטריה בלוח? תוכל לבדוק זאת על ידי קיפול לאורך קו אחר.

- לא. יש רק ציר סימטריה אחד בלוח, וזהו הקו העובר דרך המספרים הריבועיים.

6. ועכשיו נלמד על עוד תכונה של המספרים הריבועיים. נעשה זאת על ידי כתיבתם בשורה אחת, החל במספר 1 בקצה השמאלי של השורה וכלה במספר 100 בקצה הימני של השורה. כך:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

מתחת לשורה זו נרשום בשורה את ההפרש בין כל שני מספרים ריבועיים סמוכים. כך:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 19

3 5 7 9 11 13 15 17 19

7. אנו רואים שההפרשים בין המספרים הריבועיים הם מספרים אי-זוגיים בלבד, והם רשומים לפי הסדר. זה מובן, מכיוון שהמספרים הריבועיים הם לפי הסדר מספרים זוגיים ואי-זוגיים <u>לסירוגין</u>, וההפרש בין זוגי למספר אי-זוגי הוא תמיד מספר אי-זוגי.

8. אבל אפשר להבחין בעוד תופעה: מספר ריבועי מסוים פלוס ההפרש בינו לבין המספר הריבועי שבא אחריו שווה למספר הריבועי העוקב. כך:

1+3=4

4+5=9

9+7=16

16+9=25

25+11=36

וכן הלאה וכן הלאה.

9. יתרה מזאת, אם נחבר את המספרים האי-זוגיים לפי הסדר החל ב-1 נקבל תמיד מספר ריבועי, לא משנה מתי מפסיקים את החיבור. כך:

1+3+5+=9

1+3+5+7+9+11=36

1+3+5+7+9+11+13+15=64

לתופעה זו נוכל לנסח את הכלל: כל מספר ריבועי שווה לסכום המספרים __האי-זוגיים__ החל ב__1__. מספרם של מספרים אלה הוא כמספר שהעלינו אותו בריבוע.

כרטיס מס' 8

1. אם נתבונן היטב בלוח הכפל ונרכז את המבט באלכסון שלאורכו עומדים כל המספרים הריבועיים (1, 4, 9, 16 וכו'), נראה שליד כל מספר ריבועי משני הצדדים שלו לאורך אלכסון שכיוונו ↙↗

עומדים שני מספרים זהים שכל אחד מהם הוא המספר הריבועי פחות 1. כך, משני צדי ה-9 עומדים שני 8, ומשני צדי 36 עומדים שני 35, וכן הלאה. תופעת המספרים הזהים משני צדי המספרים הריבועיים נובעת מתכונת הסימטריה שדנו בה בכרטיס הקודם. אנו דנים עכשיו בתופעה נוספת השייכת למספרי הסימטריה.

2. ניקח, למשל, את המספר 15. שני מספרים כאלה נמצאים משני צדיו של המספר הריבועי 16. אחד משני המספרים האלה נמצא בהצטלבות של השורה החמישית והטור השלישי. ולכן אפשר לבטא אותו כ-5x3, ואת הביטוי הזה אפשר לרשום כך: (4-1)x(4+1). יוצא ש-

16-1=(4+1)x(4-1) או בניסוח אחר

4^2-1=(4+1)x(4-1)

באותה צורה אפשר לרשום: 35=7x5 וזה שווה:

36-1=(6+1)x(6-1) או

6^2-1=(6+1)x(6-1)

משתי הדוגמאות האלה אפשר להסיק כלל. נעשה זאת כאשר נחליף את המספר 4 בדוגמה הראשונה או את המספר 6 בדוגמה השנייה בסימן המייצג מספר כלשהו, למשל האות a. וכך נקבל:

a^2-_1_= (a+_1_)x(a-_1_)

האם תוכלו לבטא כלל זה במילים? נעזור לך בניסוח. אתה רק תמלא את החסר במשפט:
בכל מקרה שיש לכפול שני מספרים שההפרש ביניהם הוא __2__, אפשר להעלות את המספר שביניהם (הממוצע שלהם) ב_ריבוע__ ולחסר _1_ מהתוצאה.

ועכשיו מצאו דוגמאות מלוח הכפל הזה או מלוח כפל יותר גדול:

(__ -1)x(__ +1)= $\_\_^2$ -1

$(\_\_\_+1)x(\_\_\_\ -1)=\_\_\_^{2}\ -1$

$\_\_\_^{2}\ 1=(\_\_\_+1)x(\_\_-1)$

[למורה: אם הכיתה טובה והילדים נהנים מהפעילויות, אפשר להמשיך בדוגמאות נוספות כאשר ההפרש בין שני המספרים הוא 4 ולא 2: למשל, 45=9X5

49-4=(7+2)x(7-2)

$7^2-2^2=(7+2)x(7-2)$

עד שמגיעים לנוסחה:

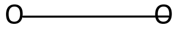
$a^2-b^2=(a+b)x(a-b)$

כרטיס מס׳ 9

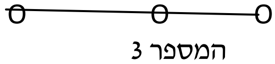
נחזור בכרטיס זה, כפי שהבטחנו, אל כרטיס מס׳ 4, וננסה לענות על השאלות הבאות:

1. נתבונן בשורה 2 של הטבלה, ונתרכז בארבעת המספרים הראשונים בלבד. איפה ממוקמים מספרים אלה בלוח הכפל?

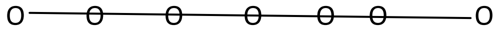
- הם ממוקמים בשורה __הראשונה__ ובטור __הראשון__.
- האם הם מצויים במקום אחר בלוח הכפל?
- __לא__
- אם כן אפשר להגיד שמספרים אלה הם כפולות של המספר __1__ בלבד. במילים אחרות מספרים אלה מתחלקים רק __בעצמם__ ובמספר __1__
- האם אפשר לסדר את הנקודות שלהם בשתי שורות או בשלוש או בכל מספר אחר של שורות? התשובה היא __לא__. סידור פשוט אחד הוא לסדר אותם בשורה אחת בלבד:



המספר 2



המספר 3



המספר 7

סידור זה ממחיש את מה שאמרנו : מספרים אלה הם כפולות של 1 בלבד. למספרים כאלה (כלומר מספרים שיש להם רק שני מחלקים : 1 והמספר עצמו), אנו קוראים <u>מספרים ראשוניים.</u>

2. ובכן, נחזור ונמנה את המספרים הראשוניים המצויים בעשרת הראשונה. מה הם?

- המספרים : __2__, __3__, __5__ו- __7__.
- מה עם המספר 1? האם הוא יכול להיחשב למספר ראשוני? האם גם לו יש שני מחלקים?
- לא, למספר 1 יש רק מחלק אחד והוא המספר 1 בעצמו. לכן הוא לא יכול להיחשב למספר ראשוני.

3. וכעת, נסה לגלות מספרים ראשוניים בעשרת השנייה (מהמספר 11 עד 20). כמה מספרים כאלה גילית?

- __4__.
- רשום אותם : __11__, __13__, __17__ ו __19_
- האם תוכל למצוא אותם בלוח הכפל שלך?
- הם לא נמצאים. ואכן, הם נמצאים בראש הרשימה של שורה
- וכעת חשוב, מדוע הם לא יכולים להימצא בלוח ?
- כי הם כפולות של __1__, כפי שאמרנו ; ואם הם כאלה, אזי הם צריכים להימצא בשורה הראשונה ובטור הראשון, אבל לוח הכפל שלנו הוא לוח כפל של 10x10 , ולכן אי אפשר למצוא אותם בו. אילו בנינו לוח כפל של 20x20 אזי היינו רואים אותם ב __שורה__ הראשונה וב __טור__ הראשון.

4. אם המספרים הראשוניים : 11, 13, 17 ו-19 לא נמצאים בלוח הכפל שלנו, הרי ברור שגם הכפולות שלהם ייעדרו מלוח כפל זה.

הכפולות של 11 הם : __22__, __33__, __44__, __55__, __66__, __77__, __88__, ו__99__

בדוק אם אכן מספרים אלה מצויים בין המספרים של שורה 0. הקף אותם בעיגול.

נמשיך. הכפולות של 13 הם :

__26__, __39__, __52__, __65__, __78__ ו__91__

בדוק אם גם מספרים אלה נעדרים מהלוח. עשה זאת על ידי מתיחת קו מתחתיהם בתוך הרשימה של שורה 0.

הלאה. הכפולות של 17 הם: __34__, __51__, __68__ ו__85__

מתח שני קווים מתחתיהן ברשימה של שורה 0.

נשארנו עם המספר הראשוני 19. הכפולות שלו הם:

__38__, __57__, __76__ ו __95__

נסמן 3 קווים מתחתיהן.

5. כתוב את המספרים הראשוניים שנמצאים בעשרת השלישית (מ-21 עד 30):

- המספרים הם: __23__ ו __29__ בלבד. הם בוודאי לא יימצאו בלוח כפל כזה מאותה סיבה שפירטנו בסעיף 5. גם הכפולות שלהם ייעדרו מהלוח. נגלה אותם ואת הכפולות שלהם ברשימה של שורה 0 ונסמן אותם על ידי הקפתם בריבוע.
- הכפולות של 23 הם: __46__, __69__ ו__92__
- הכפולות של 29 הם: __58 __ ו __87__

6. ועכשיו אחרי שהגענו עד כאן, נסה לשער מה טיבם של המספרים שנשארו לא מסומנים ברשימה של שורה 0.

- המספרים שנותרו או שהם מספרים __ראשוניים__, או שהם __כפולות__ של מספרים ראשוניים. מיין אותם לשני סוגים אלה:
- המספרים הראשוניים הם:

__31__, __37__, __41__, __43__, __47__,
__53__, __59__, __61__, __67__, __71__,
__73__, __79__, __83__, __89__, __97__

והמספרים שהם כפולות שלהם: __62__, __74__,
__75__, __82__, __84__, __86__, __93__,
__94__, __96__, __98__

7. עד עכשיו הארכנו את הדיון על מה נכלל בלוח הכפל של 10x10 ומה לא נכלל בו, והסברנו מדוע מספרים מסוימים נעדרים ממנו. כמו כן דיברנו על המספרים הראשוניים בתחום הלוח וגם מחוץ ללוח. עכשיו נוודא אם מה שלמדנו נקלט היטב, ואנו מסוגלים לנחש <u>ניחוש מושכל</u> מה ייכלל ומה לא ייכלל בלוח כפל יותר גדול. ניחוש מושכל הוא לא סתם ניחוש שלפעמים קולע ולפעמים לא קולע. המנחש סתם לא יוכל להסביר מדוע הוא ניחש כך ולא אחרת. ניחוש מושכל, לעומת זאת, הוא ניחוש שעומדת מאחוריו חשיבה. המנחש יוכל להסביר את ניחושו, גם אם הוא לא בטוח במאת

האחוזים אם הוא קולע או לא. הוא סקרן לדעת אם הוא צדק בניחושו, והוא תמיד מוכן ללמוד דברים חדשים שלא הכיר.

ובכן, נניח שיש לנו לוח כפל של 20x20, שמכיל __400__ תאים:

- האם המספרים שציינו אותם בסעיף 3 יופיעו בלוח זה? איפה הם יימצאו בלוח החדש?
- בשורה __הראשונה__ ובטור __הראשון__, ורק שם. מדוע?
- כי הם מספרים ראשוניים, שהם כפולות של המספר __1__.
- האם הכפולות שלהם יימצאו בלוח?
- __כן__.
- כל הכפולות?
- __לא__
- אילו כפולות לא יופיעו?
- הכפולות שהן גדולות מהמספר __400__
- האם המספרים המוזכרים בסעיפים 5 ו-6 יופיעו בלוח זה?
- __לא__. מכיוון שהם מספרים ראשוניים הגדולים מ-__20__. ומכיוון שמספרים ראשוניים יימצאו <u>תמיד</u> בשורה __הראשונה__ או בטור __הראשון__, ובלוח זה יש רק 20 משבצות בכל שורה ובכל טור, לכן לא יהיה להם מקום בלוח.
- האם הכפולות שלהם יופיעו?
- ודאי ש__לא__

8. ועכשיו לניחושים יותר מפורטים: ליד המספרים הבאים, רשום: "כן", אם הם יופיעו בלוח הכפל החדש ו"לא" – אם הם לא יופיעו:
9. 49_כן__, 29_לא__, 32_כן__, 77_כן_, 125_לא_, 225_כן_, 41_לא_, 160_כן_, 21_כן_, 77_כן_, 101_לא_, 57_כן_, 69_לא_, 62_לא_, 220_כן_, 86_לא_, 94_לא_, 256_כן_

[זוהי עבודה עצמית הניתנת לכל ילד וילד, והוא צריך ל"נחש" לבדו. המורה יכולה להוסיף כהנה וכהנה מספרים כראות עיניה. בסוף התרגיל, תחלק המורה לכל ילד את לוח הכפל המורחב (או תתלה פלקט שלו), והילדים יבדקו את ניחושיהם ויתנו ציונים לעצמם לפי מפתח מוסכם. אחרי הבדיקה האישית ייערך דיון משותף, שבו יידונו הנימוקים. המסקנה הכללית תהיה שכל המספרים <u>שכל אחד</u> משני הגורמים שלהם קטן מ-20 יופיעו בלוח, וכל המספרים שלפחות אחד משני הגורמים שלהם גדול מ-20 לא יופיעו, וזה, כמובן, כולל את המספרים הראשוניים הגדולים מ-20.]

כרטיס מס׳ 10

1. בכרטיסים הקודמים מיקדנו את ההסתכלות שלנו בשורות, בטורים וגם באלכסונים. בכרטיס זה נדרשים להיות יצירתיים ולהתמקד במספרים המסודרים בזוויות. לפניך קטע קטן מתוך לוח כפל כלשהו, ובו הכנסנו את המספרים לתוך מסגרות בצורת זוויות:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

2. בתוך הריבוע הקטן רשום המספר__1__

- בתוך הזווית המסומנת 2 רשומים המספרים:
  __2__, __4__, __2__

- בתוך הזווית המסומנת 3 רשומים המספרים:
  __3__, __6__, __9__, __6__, _3_.
- בתוך הזווית המסומנת 4 רשומים המספרים:
  _4_, _8_, _12_, _16_, _12_, _8_, _4_

3. מה המיוחד והמעניין בסדרות המספרים האלה? כדי להבליט את המיוחד שבהן, נרשום את הסדרות זו למטה מזו:

א) 2 | 4 | 2

ב) 3 6 | 9 | 6 3

ג) 4 8 12 | 16 | 12 8 4

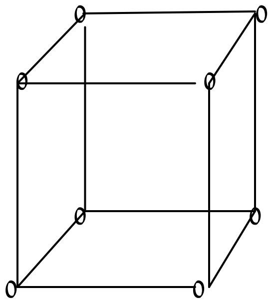
- כל אחת משורות אלה היא סדרה סימטרית, שבמרכזה עומד מספר __ריבועי__, ויורדת משמאל ומימין בשיעור השורש של המספר הריבועי. השורש הוא המספר שהכפלנו אותו בעצמו כדי לקבל את המספר הריבועי.
- אם נחבר את האיברים של כל סדרה, נקבל:

א) 2+4+2=8

ב) 3+6+9+6+3=27

ג) 4+8+12+16+12+8+4=64

- התבונן היטב בסכומים האלה, האם תוכל לומר לאיזה סוג של מספרים הם שייכים?
- אלה הם מספרים הנודעים בשם מספרים מעוקבים. פירושו של דבר שאם נתרגם את המספר לנקודות (כפי שעשינו כאשר דנו בצורתם של מספרים ריבועיים), נוכל לסדר נקודות אלה לקובייה, שבה הנקודות, בדוגמה א, יעמדו בשמונת הקדקודים של הקובייה, וכל צלע שלה יהיה מורכב משתי נקודות, כפי שמבואר בציור:



[בכל צלע בציור יש שתי נקודות, וכל הקובייה מורכבת מ- 8 נקודות]

בדוגמה ב, תהיה הצלע מורכבת מ__3__ נקודות, ובדוגמה ג, תהיה הצלע מורכבת מ__4__.

את נפח הקובייה מוצאים על יד הכפלת הצלע 3 פעמים בעצמה. זה בהנדסה. במתמטיקה, כשרוצים להכפיל מספר 3 פעמים בעצמו, מסמנים זאת ב-3 זעירה מעל ומימין למספר, כך:

$2^3=8$

$3^3=27$

$4^3=64$

4. אפשר להסתכל על הציור למעלה כסדרה של ריבועים בגדלים שונים, וכל ריבוע (חוץ מהראשון) מכיל ריבועים קטנים ממנו. כך, הריבוע הקטן ביותר, שצלעו 1, מכיל את המספר 1. הריבוע השני שצלעו 1+2=3 מכיל את המספרים:

$$(1) + (2+4+2) = 9 = 3^2$$

ב + א

הריבוע השלישי, שצלעו 1+2+3=6, מכיל את המספרים:

$$(1) + (2+4+2+) + (3+6+9+6+3)=36=6^2$$

א ב ג

אבל למדנו בסעיף הקודם שהקבוצות:

ג + ב + א

$$3^2 + 2^3 + 1^3 =$$

$$27 + 8 + 1 =$$

על כן,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = 36$$

למעשה, גילינו כאן דרך לחשב במהירות סכומם של מספרים מעוקבים עוקבים (בזה אחר זה, לפי הסדר) החל במספר 1.

כך, למשל, הסכום של ששת המספרים המעוקבים הראשונים יהיה:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=(1+2+3+4+5+6)^2=21^2=441$$

ועתה, האם תוכל לחשב במהירות מהו סכום המספרים המצויים בלוח כפל של 10x10?

[סכום המספרים מ-1 עד 10 הוא 55, לכן $55^2=3025$ הוא סכום כל המספרים שבלוח הכפל של 10x10.]