א. (1) נסמן ב- $t,\ p$ את זמני הליכת הולכי הרגל עד הפגישות שלהם עם רוכב האופניים (שעות) .

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

| | | זמן - $t$ שעות | מהירות - $v$ קמ"ש | דרך-מרחק - $s$ ק"מ |
|---|---|---|---|---|
| רוכב אופניים | מ- A עד הפגישה | $t-2$ | $v$ | $v(t-2)$ |
| הולך רגל ראשון | מ- A עד הפגישה | $t$ | $4$ | $4t$ |
| רוכב אופניים | מ- A עד הפגישה | $p-1$ | $v$ | $v(p-1)$ |
| הולך רגל שני | מ- A עד הפגישה | $p$ | $5$ | $5p$ |

המרחקים שעברו רוכב האופניים והולך הרגל הראשון עד הפגישה שווים.

כלומר המשוואה המתאימה: $v(t-2)=4t$

נביע באמצעות $v$ את הזמן שעבר מהשעה $08:00$ :

$$v(t-2)=4t$$
$$vt-2v=4t$$
$$vt-4t=2v$$
$$t(v-4)=2v$$
$$\boxed{t=\frac{2v}{v-4}}$$

את התחום בו נמצא פתרון הבעיה נפתור בסעיף ב (לסעיף זה בלבד $v>4$ ) .

תשובה: הזמן שעבר מהשעה $08:00$ : ועד פגישת הרוכב עם הולך הרגל הראשון הוא $\frac{2v}{v-4}$

(2) המרחקים שעברו רוכב האופניים והולך הרגל השני עד הפגישה שווים.

כלומר המשוואה המתאימה: $v(p-1)=5t$

נביע באמצעות $v$ את הזמן שעבר מהשעה $09:00$ ולאחר מכן נוסיף לו $1$ לקבלת התשובה.

$$v(p-1)=5p$$
$$vp-v=5p$$
$$vp-5p=v$$
$$p(v-5)=v$$
$$p=\frac{v}{v-5}$$
$$p+1=\frac{v}{v-5}+1=\frac{v+v-5}{v-5}=\frac{2v-5}{v-5}$$
$$\boxed{p+1=\frac{2v-5}{v-5}}$$

את התחום בו נמצא פתרון הבעיה נפתור בסעיף ב (לסעיף זה בלבד $v>5$ או $0<v<2.5$ ).

**תשובה: הזמן שעבר מהשעה** $08:00$ **: ועד פגישת הרוכב עם הולך הרגל השני הוא** $\frac{2v-5}{v-5}$ **.**

**ב. רוכב האופניים הדביק תחילה את הולך הרגל השני, וכעבור <u>יותר</u> מ-** $10$ **דקות הדביק את הולך הרגל הראשון**

**כלומר, הזמן בין הפגישות גדול מ-** $\frac{1}{6}=\frac{10}{60}$ **שעה.**

$$\frac{2v}{v-4}-\frac{2v-5}{v-5}>\frac{1}{6}$$

$$\frac{2v}{v-4}-\frac{2v-5}{v-5}-\frac{1}{6}>0$$

$$\frac{12v(v-5)-6(v-4)(2v-5)-(v-4)(v-5)}{6(v-5)(v-4)}>0$$

$$\frac{12v^2-60v-6(2v^2-5v-8v+20)-(v^2-5v-4v+20)}{6(v-5)(v-4)}>0$$

$$\frac{12v^2-60v-12v^2+78v-120-v^2+9v-20}{6(v-5)(v-4)}>0$$

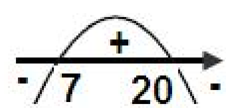
$$\frac{-v^2+27v-140}{6(v-5)(v-4)}>0$$

$$\frac{-v^2+27v-140}{6(v-5)(v-4)}>0$$

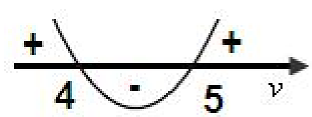
$$-v^2+27v-140=0$$

$$v_{1,2}=\frac{-27\pm13}{-2}\quad\rightarrow v_1=7,\ v_2=20$$

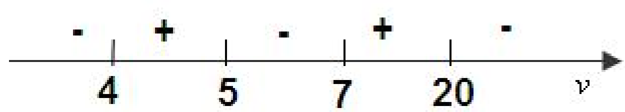
**ציור סימני מונה אי השוויון**




**ציור סימני מכנה אי השוויון**




**פתרון אי השוויון, בעזרת טבלת סימנים:**




**כלומר** $7<v<20$ **או** $4<v<5$ **.**

**מכיוון ו-** $v>5$ **, תהייה התשובה הסופית** $7<v<20$

**תשובה:** $7<v<20$

**א. נתונה סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה:**

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n^2+3n+2} \end{cases}$$

**נוכיח כי לכל** $n$ **טבעי מתקיים** $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ **.**

**1. נבדוק את נכונות הטענה עבור** $n=1$

**נתון:** $a_1 = 0$ **.**

**על פי הטענה** $a_1 = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

**לכן הטענה נכונה עבור** $n=1$

**2. נניח את נכונות הטענה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

**כלומר:** $a_k = \dfrac{k-1}{k+1}$

**3. נוכיח שהטענה נכונה עבור** $n=k+1$ **, לכן צ"ל**

$$a_{k+1} = \frac{k}{k+2}$$

**נשתמש בכלל הנסיגה**

$$\begin{aligned} & a_{k+1} = a_k + \frac{2}{k^2+3k+2} \\ \Leftrightarrow\ & a_{k+1} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} \quad \leftarrow \textit{induction} \\ \Leftrightarrow\ & a_{k+1} = \frac{(k-1)(k+2)+2}{(k+1)(k+2)} \\ \Leftrightarrow\ & a_{k+1} = \frac{k^2+2k-k-2+2}{(k+1)(k+2)} \\ \Leftrightarrow\ & a_{k+1} = \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{a_{k+1} = \frac{k}{k+2}} \end{aligned}$$

**מתקבל שהוכחנו את נכונות הטענה עבור** $n=k+1$

**4. בדקנו את נכונות הטענה עבור** $n=1$ ,

**הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי**

**אז היא נכונה עבור** $n=k+1$

**לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** $n$ **טבעי.**

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=2$,
הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ טבעי זוגי
אז היא נכונה עבור $n=k+2$
לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל $n$ טבעי זוגי.

ב. (1) על פי כלל הנסיגה $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{n^2+3n+2}$

כלומר: $\frac{2}{a_{n+1}-a_n}=(n+1)(n+2)$, שהיא מכפלה של שני מספרים עוקבים, ואחד מהם בהכרח זוגי

תשובה: הביטוי $\frac{2}{a_{n+1}-a_n}$ הוא מספר זוגי לכל $n$ טבעי.

(2) על פי סעיף (1) הביטוי $\frac{2}{a_{n+1}-a_n}$ הוא מכפלה של מספר זוגי ומספר אי-זוגי,

ויתחלק ב- $4$ *ללא* שארית רק עבור $n$ שאינו מתחלק ב- $4$ *ללא* שארית (כי אז $\frac{n+2}{4}$ יהיה שלם)

תשובה: הביטוי $\frac{2}{a_{n+1}-a_n}$ אינו מתחלק ב- $4$ בלי שארית לכל $n$ טבעי גדול מ- $1$.

ג. נתון כי ההפרש בין איבר מסוים בסדרה לבין האיבר שלפניו הוא $\frac{20}{99}\cdot10^{-3}$.

על פי הסעיף הקודם: $a_{n+1}-a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{20}{99}\cdot10^{-3}$$
$$\frac{1\cancel{2}}{(n+1)(n+2)}=\frac{1\cancel{10}\,\cancel{20}}{99\cdot10^{\cancel{3}2}}$$
$$9900=(n+1)(n+2)$$

קל לראות כי: $9900=99\cdot100$ ולכן $n=98$

על פי טענת האינדוקציה, עבור $n=98$ (זוגי) $a_{98}=\frac{98-1}{98+1}=\frac{97}{99}$

$$a_{99}=\frac{97}{99}+\frac{20}{99}\cdot10^{-3}$$
$$\boxed{a_{99}=0.98}$$

תשובה: $a_{99}=0.98$.

**נתונה הפונקציה** $f(x)=\frac{4}{3}x^3-a^2x+a^2$ **,** $a>0$ **.**

**א. בנקודת החיתוך עם ציר ה-** $y$ **מתקיים** $x=0$ **ובהתאם:** $f(0)=\frac{4}{3}\cdot 0^3-a^2\cdot 0+a^2=a^2 \quad \rightarrow \boxed{(0,a^2)}$

**תשובה:** $(0,a^2)$

**ב. (1) נמצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, ואת סוגן.**

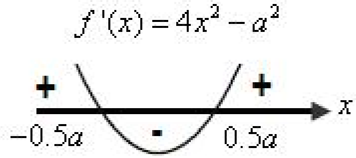
$f(x)=\frac{4}{3}x^3-a^2x+a^2$

$f'(x)=4x^2-a^2$

$0=4x^2-a^2$

$4x^2=a^2$

$x^2=0.25a^2$




$x=0.5a \quad \rightarrow f(0)=\frac{4}{3}\cdot(0.5a)^3-a^2\cdot 0.5a+a^2=-\frac{a^3}{3}+a^2 \quad \rightarrow \boxed{(0.5a,\ a^2-\frac{a^3}{3})}$

$x=-0.5a \quad \rightarrow f(0)=\frac{4}{3}\cdot(-0.5a)^3-a^2\cdot(-0.5a)+a^2=\frac{a^3}{3}+a^2 \quad \rightarrow \boxed{(-0.5a,\ a^2+\frac{a^3}{3})}$

**נגזרת הפונקציה היא עם גרף של פרבולה בעלת מינימום,**

**כאשר הפונקציה עולה כאשר הנגזרת חיובית ויורדת כאשר הנגזרת שלילית.**

**עבור** $x=0.5a$ **הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

**עבור הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

**תשובה:** $(0.5a,\ a^2-\frac{a^3}{3})$ **מינימום ,** $(-0.5a,\ a^2+\frac{a^3}{3})$ **מקסימום.**

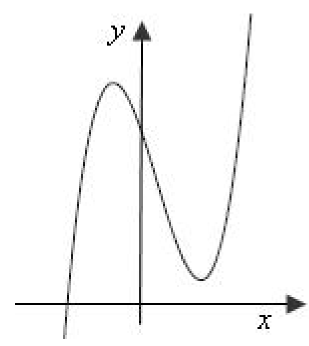
**(2) ערך הפונקציה בנקודת המקסימום הוא** $a^2+\frac{a^3}{3}$**, כלומר סכום של שני ביטויים חיוביים עבור** $a>0$ ,

**כאשר שיעור ה-** $x$ **(** $-0.5a$ **)**

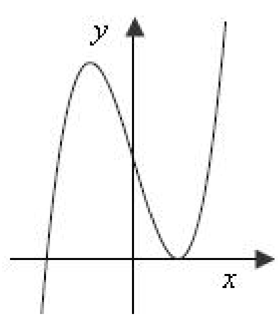
**תשובה: ברביע השני.**

**ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה בשלושה מצבים, בהתאם למספר הפתרונות של המשוואה** $f(x)=0$ **.**

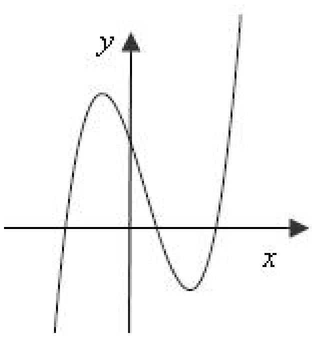
**(1) פתרון אחד**




**(2) שני פתרונות**




**(3) שלושה פתרונות**



ד. נמצא כיצד משפיע ערכו של $a$ על סימן שיעור ה- $y$ של נקודת המינימום שהוא $a^2-\frac{a^3}{3}$,

ובהתאם על מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0$.

$a^2-\frac{a^3}{3}=\frac{3a^2-a^3}{3}=\frac{a^2(3-a)}{3}$, כלומר סימן שיעור ה- $y$ נקבע על ידי סימן הביטוי $3-a$, כאשר $a>0$.

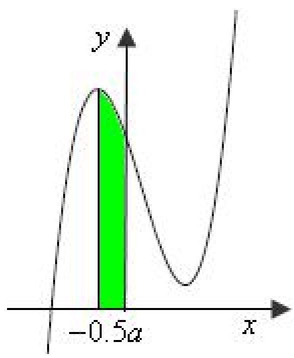
(1) שני פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}}=0$. ולכן, תשובה: $a=3$

(2) שני פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}}>0$, כלומר כאשר $a<3$ ומכיוון ש- $a>0$ אז: תשובה: $0<a<3$

(1) שלושה פתרונות יתקבלו, כאשר $y_{\text{Min}}<0$, ולכן: תשובה: $a>3$.

ה. כיוון שנקודת המקסימום של הפונקציה ברביע השני, עבור $a>0$

אין השפעה לערכו המדויק של $a$ על אופן חישוב השטח, שכולו ברביע השני.




$$S=\int_{-0.5a}^{0}(\frac{4}{3}x^3-a^2x+a^2-0)\,dx$$

$$S=(\frac{x^4}{3}-\frac{a^2x^2}{2}+a^2x)\Big]_{-0.5a}^{0}$$

$$S=(0)-(\frac{(-0.5a)^4}{3}-\frac{a^2\cdot(-0.5a)^2}{2}+a^2\cdot(-0.5a))$$

$$S=(0)-(\frac{a^4}{48}-\frac{a^4}{8}-\frac{a^3}{2})$$

$$S=\frac{5a^4}{48}+\frac{a^3}{2}$$

ובהתאם לנתון כי גודל השטח הוא $\frac{a^3}{2}+\frac{80}{3}$

$$\frac{5a^4}{48}+\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{2}+\frac{80}{3}$$

$$\frac{5a^4}{48}=\frac{80}{3}$$

$$a^4=256$$

$$a=4\quad\leftarrow a>0$$

מכיוון ו- $a=4>3$, הרי שעל פי הסעיף הקודם יתקבלו שלושה פתרונות למשוואה $f(x)=0$.

תשובה: שלושה פתרונות.

**א. נתונה הפונקציה:** $f(x)=\frac{3}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(4x)$ **בתחום** $0\le x\le\frac{®}{4}$.

$\cos 2x\ge 0$ **בתחום הנתון, כי** $\cos\sim\ \ge 0$ **בתחום** $0\le x\le\frac{®}{2}$

$\sin 4x\ge 0$ **בתחום הנתון, כי** $\sin\sim\ \ge 0$ **בתחום** $0\le x\le ®$.

**לכן** $f(x)$ **היא סכום של שני מחוברים אי-שליליים, כלומר** $f(x)\ge 0$ .

**תשובה: הוכַח.**

**ב. נסמן את שיעורי הנקודה** $A(t,\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin\ 4t)$ **, כאשר שיעורי הנקודה חיוביים בתום** $0\le x\le\frac{®}{4}$.

**הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *סכום המרחקים של הנקודה* A *מהצירים*,**

**ומכיוון שהנקודה ברביע הראשון, הפונקציה היא למעשה סכום שיעורי הנקודה.**

$$\boxed{f(t)=t+\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin\ 4t}$$

**נמצא את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור:**

$$f(0)=0+\frac{3}{2}\cos(2\cdot 0)+\frac{1}{4}\sin(4\cdot 0)=1.5\quad\rightarrow(0,1.5)$$

$$f(\frac{®}{4})=\frac{®}{4}+\frac{3}{2}\cos(2\cdot\frac{®}{4})+\frac{1}{4}\sin(4\cdot\frac{®}{4})=0\quad\rightarrow(\frac{®}{4},\frac{®}{4})$$

**ולכן נקודות הקצה הן:** $(0,1.5)$ **,** $(\frac{®}{4},\frac{®}{4})$

$$\boxed{f'(t)=1-3\sin 2t+\cos 4t}$$

$$0=1-3\sin 2t+\cos 4t$$

$$0=1-3\sin 2t+1-2\sin^2 2t \quad \leftarrow \cos 2x=1-2\sin^2 2x$$

$$2\sin^2 2t+3\sin 2t-2=0$$

$$(\sin 2t)_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{4}$$

$$\sin 2t=0.5=\sin\frac{\pi}{6} \qquad \cancel{\sin 2x=-2} \qquad \leftarrow -1\le \sin x\le 1$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \qquad 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{12}+2\pi k \qquad x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$$

$$k=0 \quad \rightarrow x=\frac{\pi}{12}$$

$$f(\frac{\pi}{12})=\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}\cos(2\cdot\frac{\pi}{12})+\frac{1}{4}\sin(4\cdot\frac{\pi}{12})$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{12}+\frac{7\sqrt{3}}{8}\rightarrow(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}+\frac{7\sqrt{3}}{8})=(\frac{\pi}{12},1.778)$$

ושיעורי הנקודה החשודה כקיצון הם $(\frac{\pi}{12},1.778)$

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה ונזהה את הקיצון המוחלט.

| $x$ | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{12}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{\pi}{4}$ | | 1.778 | | 1.5 |
| $f'(x)$ | | | | | |
| **מסקנה** | **Min** | ↘ | **Max** | ↗ | **Min** |

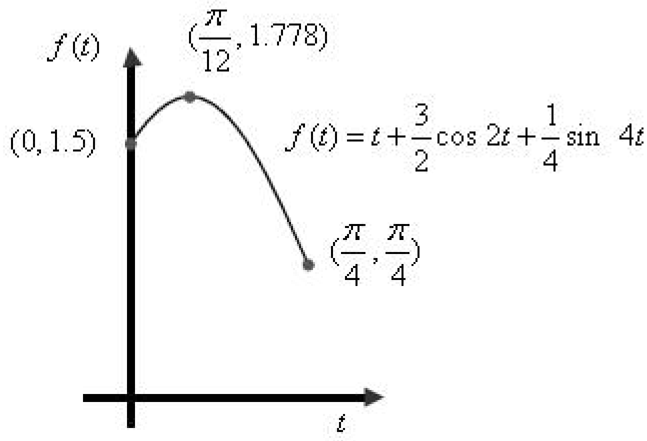
**על פי הטבלה, וגם על פי הסרטוט בסעיף ג, הערך המקסימלי של הפונקציה הוא** 1.778 **.**

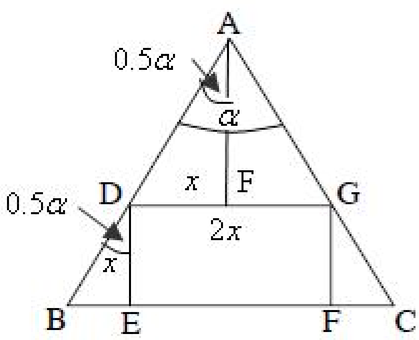
**תשובה: הערך המקסימלי של סכום המרחקים של הנקודה** A **מהצירים הוא** 1.778**.**

**ב. על פי הטבלה, וגם על פי הסרטוט בסעיף ג, הערך המקסימלי של הפונקציה הוא** $\frac{\pi}{4}=0.7854$ **.**

**תשובה: הערך המקסימלי של סכום המרחקים של הנקודה** A **מהצירים הוא** $\frac{\pi}{4}=0.7854$**.**

ג. הסרטוט המתאים






AF **חוצה זווית הראש (בניית עזר) במשולש שווה שוקיים.**

**לכן ההמשך שלו יהיה גובה לבסיס,**

**ועקב שצלעות המלבן מקבילות זו לזו, הרי ש-** $AF \perp DG$ .

**בהתאם** $\Delta ADG$ **שווה שוקיים, ולכן** $DF = GF$ .

**גם** $DE \parallel AF$ **ולכן :** $\sphericalangle BDE = \sphericalangle DAF = 0.5\alpha$ .

**נסמן** $DE = x$ **ולכן** $DF = x$, $DG = 2DE = 2x$ .

**(זווית היקפית שווה לחצי הקשת עליה היא נשענת)**

**תשובה:** $\sphericalangle BAC = 60°$

<u>$\Delta ADF$</u>

$$\sin 0.5\alpha = \frac{DF}{AD} \quad \rightarrow AD = \frac{x}{\sin 0.5\alpha}$$

<u>$\Delta BDE$</u>

$$\cos 0.5\alpha = \frac{DE}{BD} \quad \rightarrow BD = \frac{x}{\cos 0.5\alpha}$$

$$AB = \frac{x}{\sin 0.5\alpha} + \frac{x}{\cos 0.5\alpha}$$

$$AB = \frac{x\cos 0.5\alpha + x\sin 0.5\alpha}{\sin 0.5\alpha \cos 0.5\alpha}$$

$$AB = \frac{x(\cos 0.5\alpha + \sin 0.5\alpha)}{0.5\sin\alpha}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{x(\cos 0.5\alpha + \sin 0.5\alpha)}{0.5\sin\alpha}\right)^2 \sin\alpha$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(\cos^2 0.5\alpha + 2\cos 0.5\alpha \sin 0.5\alpha + \sin^2 0.5\alpha)}{0.25\sin^2\alpha} \cdot \sin\alpha$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{x^2(1+\sin\alpha)}{0.5\sin\alpha}$$

**נמצא עבור אילו ערכי** $\alpha$ **שטח המלבן** DEFG **הוא** $\frac{3}{8}$ **משטח המשולש** ABC .

$$2x^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^2(1+\sin\alpha)}{0.5\sin\alpha} \quad / : x^2 \neq 0$$

$$8\sin\alpha = 3 + 3\sin\alpha$$

$$5\sin\alpha = 3$$

$$\sin\alpha = 0.6$$

$$\boxed{\alpha = 36.87°, \quad \alpha = 143.13°}$$

**תשובה:** $\alpha = 36.87°, \quad \alpha = 143.13°$