סיכום סדרות – מתאים לשאלונים 005, 805, 806

פרק זה הינו חלק מסיכום כולל לשאלון 005 שנכתב על-ידי מאיר בכור

סוגי הסדרות בסיכום זה:
סדרה חשבונית, סדרה הנדסית, סדרות מעורבות, סדרה הנדסית אינסופית יורדת, סדרת נסיגה.

בדרך-כלל, האיברים של כל סדרה יסומנו כך: - $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ , \ldots\ldots ,\ a_{n-2}\ ,\ a_{n-1}\ ,\ a_n$

סדרה חשבונית

הגדרה: -
סדרת מספרים נקראת "סדרה חשבונית" (אריתמטית) אם ההפרש בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא מספר קבוע.

d - הפרש הסדרה החשבונית

לפיכך - $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots\ldots = a_n - a_{n-1}$

כאשר $d > 0$ הסדרה החשבונית עולה, כאשר $d < 0$ הסדרה החשבונית יורדת.

בצורה כללית: כאשר $a_{n+1} > a_n$ לכל n - הסדרה עולה.

כאשר $a_{n+1} < a_n$ לכל n - הסדרה יורדת.

כל איבר בסדרה חשבונית הוא הממוצע החשבוני של שני האיברים הסמוכים לו.
אם a, b, c הם שלושה מספרים עוקבים בסדרה חשבונית אז מתקיים: $b = \frac{a+c}{2}$.

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית: $a_n = a_1 + (n-1)d$ (הנוסחא מופיעה בדף הנוסחאות).

האיבר הכללי "מייצג" את כל איברי הסדרה החל מהראשון ועד האחרון.
הנוסחא היא פונקציה של n - מיקום האיבר בסדרה.

על-מנת <u>להוכיח שהסדרה היא סדרה חשבונית</u> יש להוכיח, בהתאם להגדרה, כי ההפרש בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא מספר קבוע.
כאשר <u>נתון</u> a_n יש:-

א. למצוא את a_{n-1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת n-1).
ב. למצוא את ההפרש $a_n - a_{n-1}$ ולקבל תוצאה שהיא קבועה ולא תלויה ב- n.
ג. לסכם את התשובה (חובה!):
"קבלנו הפרש קבוע בין שני איברים עוקבים ולכן הסדרה היא סדרה חשבונית".

<u>סכום של n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית</u>: - $S_n = \left[2a_1 + (n-1)d\right]\frac{n}{2}$
(נוסחא זו מופיעה בדף הנוסחאות).

קיימות עוד שתי נוסחאות שאינן מופיעות בדף הנוסחאות: - (מומלץ להכירן)

$$S_n = \left[2a_n - (n-1)d\right]\frac{n}{2} \quad , \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

יוצא איפה, שבסדרה חשבונית קיימות שתי משוואות עם 5 פרמטרים / נעלמים:
a_1 , n , a_n , d , S_n
ולפיכך, חלקם חייב להופיע בנתוני השאלה.

בהרבה מהשאלות מומלץ ל"תרגם" את האיברים הנתונים בשאלה ל- a_1 ו- d. לדוגמא: -
אם נתון $a_{13} = 8$ אז: $a_{13} = a_1 + (13-1)d = 8$ ולכן: $a_1 + 12d = 8$.

<u>שימו לב!</u>
אם נתון הסכום של שלושה מספרים עוקבים בסדרה חשבונית, ניתן למצוא מיידית את האיבר האמצעי כאשר נסמן האיברים בצורה הבאה: $x - d , x , x + d$. הסכום הנתון יהיה 3x .

<u>כאשר נתון s_n ורוצים למצוא את a_n - האיבר הכללי:</u>

א. יש למצוא את S_{n-1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת n-1).

ב. למצוא את ההפרש בין $S_n - S_{n-1}$ - הפרש זה יהיה a_n. $\boxed{\text{כלומר: } a_n = S_n - S_{n-1}}$

ובדוגמא מספרית: $a_{10} = S_{10} - S_9$.

ג. לוודא ש: $S_1 = a_1$, כלומר להציב פעם n=1 ב- S_n הנתון ופעם להציב n=1 ב- a_n

(שהתקבל בסעיף ב') ולוודא שמתקבל מספר שווה.

ד. במידה וכעת רוצים להוכיח כי הסדרה היא סדרה חשבונית, יש להוכיח כי: קבוע = $a_n - a_{n-1}$.

<u>סכום איברים אחרונים</u>

לא קיימת נוסחא לסכום האיברים האחרונים של סדרה ולפיכך, קיימות שתי שיטות למציאת סכום האיברים האחרונים:-

א. <u>הסכום הכללי של הסדרה פחות סכום האיברים הראשונים שלה</u>.

דוגמא 1: בסדרה 20 איברים ורוצים למצוא את סכום 8 האיברים האחרונים של הסדרה.

סכום 12 האיברים הראשונים הוא S_{12} (20 – 8 = 12).

סכום כל 20 האיברים בסדרה (הסכום הכללי) הוא S_{20} ולכן סכום 8 האיברים

האחרונים יהיה: $S = S_{20} - S_{12}$. (סכום 8 האיברים האחרונים)

דוגמא 2: בסדרה n איברים ויש למצוא את n – 5 האיברים האחרונים ולכן הנוסחא תהיה:

$S = S_n - S_5$ (סכום n – 5 האיברים האחרונים)

מ"בחינה גרפית":

$$\overbrace{\underbrace{a_1 \ldots\ldots a_5}_{S_5},\ a_6 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n}^{S_n}$$

<u>שימו לב!</u>

1) הסימון S_8 הוא סימון של סכום 8 האיברים **<u>הראשונים</u>** (ה-8 הוא דוגמא..), ולפיכך **<u>אין</u>** לרשום את סכום האיברים **<u>האחרונים</u>** בצורה זו , אלא לסמן S בלבד ולכתוב במילים לידו: "סכום 8 האיברים האחרונים".

2) יוצא שתמיד ניתן לבדוק אם הגעתם לנוסחא הנכונה של האיברים האחרונים בעזרת חיסור האינדקסים:

בדוגמא 1: 8 = 20-12 נותן את 8 האיברים האחרונים שנתבקשתם למצוא.

בדוגמא 2: n – 5 הם סה"כ האיברים האחרונים שנתבקשתם למצוא.

ב. <u>להפוך את האיבר הראשון של האיברים האחרונים ל-</u> a_1 .

בדוגמא - לחשב את a_{13} ו"להפוך" אותו לאיבר הראשון כלומר התוצאה תהיה a_1 .

כעת ניתן להשתמש בנוסחת סכום האיברים הראשונים $S_8 = \left[2a_1 + (8-1)d\right]\frac{8}{2}$.

<u>שימו לב!</u>

על-מנת לאתר מהו האיבר הראשון של האיברים האחרונים יש לכם שתי אפשרויות:

1) "תרגיל עזר" שמסתמך על נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית -
נסמן את האיבר הראשון של האיברים האחרונים כ- a_x
d של האינדקסים הוא 1 ; y הוא מספר האיברים האחרונים הדרוש
ולכן: $n = x + (y-1)\cdot 1$
ולדוגמא שלעיל: $20 = x + (8-1)\cdot 1$ ולכן $x = 13$ (כלומר האיבר הראשון של האיברים האחרונים הוא a_{13}).

2) לרשום את הפרשי הסכומים כמו בשיטה א' <u>והאינדקס</u> של האיבר הראשון של האיברים האחרונים יהיה האינדקס של סכום האיברים הראשונים + 1.
ובדוגמאות שלעיל:

בדוגמא א': $S = S_{20} - S_{12}$.
האינדקס של סכום האיברים הראשונים הוא 12 ולכן a_{13} הוא האיבר הראשון של האיברים האחרונים.

בדוגמא ב': $S = S_n - S_5$
האינדקס של סכום האיברים הראשונים הוא 5 ולכן a_6 הוא האיבר הראשון של האיברים האחרונים.

מציאת מספר האיברים בסדרה חשבונית

כאשר מבקשים למצוא את n עליכם לזכור כי על n להיות חיובי ושלם (כי הוא מציין גם מיקום).
כאשר מקבלים שני פתרונות חיובים ושלמים עבור n (כפתרון של משוואה ריבועית) ייתכן ששני הפתרונות מתאימים, אך ייתכן שיש לפסול אחד מהם.
הדרך להחליט היא לבדוק את a_1 ואת a_n ולראות אם הם מתאימים לתנאי השאלה (והגיוניים).

סכום המקומות האי-זוגיים והזוגיים

בצורה כללית יש לחלק את הבעיה לשלוש: -
הסדרה המקורית, סדרת המקומות האי-זוגיים וסדרת המקומות הזוגיים.

א. <u>כאשר בסדרה החשבונית – המקורית יש מספר זוגי של איברים ($2n$ איברים)</u>

1. בסדרת המקומות <u>האי-זוגיים</u> הסכום יהיה: $S_n = \left[2a_1 + (n-1)2d\right]\frac{n}{2}$

<u>שימו לב!</u>
הפרש הסדרה המקורית הוכפל ($2d$ במקום d) ומספר האיברים הפך ל- n במקום $2n$.

2. בסדרת המקומות <u>הזוגיים</u> הסכום יהיה: $S_n = \left[2a_2 + (n-1)2d\right]\frac{n}{2}$

<u>שימו לב!</u>
* בנוסחה משתמשים ב- a_2 במקום ב- a_1 : $a_2 = a_1 + d$, האיבר השני בסדרה המקורית הוא האיבר הראשון בסדרה הזוגית.
הפרש הסדרה המקורית הוכפל ($2d$ במקום d) ומספר האיברים הפך ל- n במקום $2n$.
* לא לשכוח להכפיל ב- 2 את n על-מנת למצוא את <u>מספר האיברים הנכון</u> ($2n$).

3. כאשר בסדרה יש $2n$ איברים <u>ההפרש</u> בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לבין סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא:-

S_n(מקומות זוגיים) - S_n(מקומות אי-זוגיים) =

$$= \left[2(a_1+d) + (n-1)2d\right]\frac{n}{2} - \left[2a_1 + (n-1)2d\right]\frac{n}{2} =$$

$$= \left[2a_1 + 2d + 2nd - 2d\right]\frac{n}{2} - \left[2a_1 + 2nd - 2d\right]\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + 2nd - 2a_1 - 2nd + 2d\right] = \underline{\underline{nd}}$$

ב. <u>כאשר בסדרה החשבונית – המקורית יש מספר אי-זוגי של איברים (2n +1 איברים)</u>

1. בסדרת המקומות <u>האי-זוגיים</u> הסכום יהיה: $S_{n+1}=\left[2a_1+(n+1-1)2d\right]\frac{n+1}{2}$

<u>שימו לב!</u>

הפרש הסדרה המקורית הוכפל (2d במקום d) ומספר האיברים הפך ל- n+1 במקום 2n+1.

2. בסדרת המקומות <u>הזוגיים</u> הסכום יהיה: $S_n=\left[2a_2+(n-1)2d\right]\frac{n}{2}$

<u>שימו לב!</u>

בנוסחה משתמשים ב- a_2 במקום ב- a_1 : $a_2=a_1+d$, האיבר השני בסדרה המקורית הוא האיבר הראשון בסדרה הזוגית.

הפרש הסדרה המקורית הוכפל (2d במקום d) ומספר האיברים הפך ל- n במקום 2n.

<u>סדרה הנדסית</u>

<u>הגדרה:-</u>
סדרת מספרים נקראת "סדרה הנדסית" אם <u>היחס (המנה)</u> בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא <u>מספר קבוע.</u>

q - מנת הסדרה (היחס הקבוע). לפיכך - $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

<u>בסדרה הנדסית לא ייתכן שאחד האיברים יהיה אפס!</u>

<u>עליה וירידה של סדרה הנדסית</u>
עליה וירידה של סדרה הנדסית היא בהתאם ל- a_1 **ו-** q**:**
כאשר כל המספרים עולים – הסדרה עולה;
כאשר כל המספרים יורדים – הסדרה יורדת;
כאשר המספרים עולים ויורדים – הסדרה לא עולה ולא יורדת;

בצורה כללית: כאשר $a_{n+1} > a_n$ **לכל** n **- הסדרה עולה.**

כאשר $a_{n+1} < a_n$ **לכל** n **- הסדרה יורדת.**

כל איבר בסדרה הנדסית הוא הממוצע ההנדסי של שני האיברים הסמוכים לו –
אם a , b , c **הם שלושה מספרים עוקבים בסדרה הנדסית אז מתקיים:** $b^2 = ac$

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית (מופיעה בדף הנוסחאות): $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

האיבר הכללי מייצג את כל איברי הסדרה, החל מהראשון ועד האחרון.
הנוסחא היא פונקציה של n **- מיקום האיבר בסדרה.**

על-מנת להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית יש להוכיח, בהתאם להגדרה, כי <u>היחס</u> בין כל איבר לאיבר הקודם לו הוא מספר <u>קבוע</u> .

כאשר <u>נתון</u> a_n ויש להוכיח שהסדרה היא הנדסית צריך:

א. למצוא את a_{n-1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת $n-1$).

ב. למצוא את היחס $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ ולקבל תוצאה שהיא קבועה ואינה תלויה ב- n.

ג. לסכם את התשובה (חובה!):
"קבלנו מנה קבועה בין שני איברים עוקבים ולכן הסדרה היא סדרה הנדסית".

<u>סכום של n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית:</u>

$(q \neq 1)$ $$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$$ (נוסחא זו מופיעה בדף הנוסחאות)

<u>כאשר $q=1$ אסור להשתמש בנוסחא הנ"ל</u> ולכן הסכום יהיה: $S_n = a_1 \cdot n$

קיימת עוד נוסחא לחישוב סכום n האיברים הראשונים ,שאינה מופיעה בדף הנוסחאות, אך מומלץ להכירה:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} \qquad (q \neq 1)$$

יוצא איפה, שבסדרה הנדסית קיימות שתי משוואות עם 5 פרמטרים / נעלמים: a_1 , n , a_n , q , S_n
ולפיכך, חלקם חייב להופיע בנתוני השאלה. בהרבה מהשאלות מומלץ ל"תרגם" את האיברים הנתונים ל- a_1 ו- q.

לדוגמא: - אם נתון $a_{13} = 8$, אז: $a_{13} = 8 = a_1 \cdot q^{13-1} = a_1 \cdot q^{12}$.

כמו כן, בהרבה מקרים בהם מדובר בסדרה הנדסית ניתן לחלק משוואה במשוואה על-מנת לפתור את מערכת המשוואות (<u>נא לשים לב שאינכם מחלקים באפס</u>!)

<u>שימו לב!</u>
אם נתונה המכפלה של שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית, ניתן למצוא מיידית את האיבר האמצעי כאשר נסמן את האיברים בצורה הבאה: $xq \;,\; x \;,\; \frac{x}{q}$. המכפלה הנתונה תהיה x^3 .

<u>כאשר נתון S_n ורוצים למצוא את a_n - האיבר הכללי:</u>

א. יש למצוא את S_{n-1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת $n-1$).

ב. למצוא את ההפרש בין $S_n - S_{n-1}$ - הפרש זה יהיה a_n. כלומר: $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$

ובדוגמא מספרית: $a_{10} = S_{10} - S_9$.

ג. לוודא ש: $S_1 = a_1$, כלומר להציב פעם $n=1$ ב- S_n הנתון ופעם להציב $n=1$ ב- a_n (שהתקבל בסעיף ב') ולוודא שמתקבל מספר שווה.

ד. במידה וכעת רוצים להוכיח כי הסדרה היא סדרה הנדסית, יש להוכיח כי: קבוע = $\frac{a_n}{a_{n-1}}$

<u>סכום איברים אחרונים בסדרה הנדסית</u>

לא קיימת נוסחא לסכום האיברים האחרונים של סדרה ולפיכך, קיימות שתי שיטות למציאת סכום האיברים האחרונים:-

א. <u>הסכום הכללי של הסדרה פחות סכום האיברים הראשונים שלה</u>.

דוגמא 1: בסדרה 20 איברים ורוצים למצוא את סכום 8 האיברים האחרונים של הסדרה.
סכום 12 האיברים הראשונים הוא S_{12} (12 = 8 – 20).
סכום כל 20 האיברים בסדרה (הסכום הכללי) הוא S_{20} ולכן סכום 8 האיברים האחרונים יהיה: $S = S_{20} - S_{12}$. (סכום 8 האיברים האחרונים)

דוגמא 2: בסדרה n איברים ויש למצוא את $n - 5$ האיברים האחרונים ולכן הנוסחא תהיה:
$S = S_n - S_5$ (סכום $n - 5$ האיברים האחרונים)

מ"בחינה גרפית":

$$\overbrace{\underbrace{a_1 \ldots\ldots a_5}_{S_5},\ a_6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n}^{S_n}$$

<u>שימו לב!</u>

1) **הסימון S_8 הוא סימון של סכום 8 האיברים <u>הראשונים</u> (ה-8 הוא דוגמא..), ולפיכך <u>אין</u> לרשום את סכום האיברים <u>האחרונים</u> בצורה זו , אלא לסמן S בלבד ולכתוב במילים לידו: "סכום 8 האיברים האחרונים".**
2) **יוצא שתמיד ניתן לבדוק אם הגעתם לנוסחא הנכונה של האיברים האחרונים בעזרת חיסור האינדקסים:**
   בדוגמא 1: 8 = 20-12 נותן את 8 האיברים האחרונים שנתבקשתם למצוא.
   בדוגמא 2: n – 5 הם סה"כ האיברים האחרונים שנתבקשתם למצוא.

ב. להפוך <u>את האיבר הראשון של האיברים האחרונים ל-</u> a_1.

בדוגמא - לחשב את a_{13} ו"להפוך" אותו לאיבר הראשון כלומר התוצאה תהיה a_1.

כעת ניתן להשתמש בנוסחת סכום האיברים הראשונים: $S_8 = \dfrac{a_1\left(q^8-1\right)}{q-1}$.

<u>שימו לב!</u>
על-מנת לאתר מהו האיבר הראשון של האיברים האחרונים יש לכם שתי אפשרויות:

1) **"תרגיל עזר" שמסתמך על נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית -**
   נסמן את האיבר הראשון של האיברים האחרונים כ- a_x
   d של האינדקסים הוא 1 ; y הוא מספר האיברים האחרונים הדרוש
   ולכן: $n = x + (y-1)\cdot 1$
   ולדוגמא שלעיל: $20 = x + (8-1)\cdot 1$ ולכן $x = 13$ (כלומר האיבר הראשון של האיברים האחרונים הוא a_{13}).

2) **לרשום את הפרשי הסכומים כמו בשיטה א' <u>והאינדקס</u> של האיבר הראשון של האיברים האחרונים יהיה האינדקס של סכום האיברים הראשונים + 1.**
   ובדוגמאות שלעיל:

   בדוגמא א': $S = S_{20} - S_{12}$.
   האינדקס של סכום האיברים הראשונים הוא 12 ולכן a_{13} הוא האיבר הראשון של האיברים האחרונים.

   בדוגמא ב': $S = S_n - S_5$
   האינדקס של סכום האיברים הראשונים הוא 5 ולכן a_6 הוא האיבר הראשון של האיברים האחרונים.

מציאת מספר האיברים בסדרה הנדסית

כאשר מבקשים למצוא את n עליכם לזכור כי על n להיות חיובי ושלם (כי הוא מציין גם מיקום).
כאשר מקבלים שני פתרונות חיובים ושלמים עבור n (כפתרון של משוואה ריבועית) ייתכן ששני הפתרונות מתאימים, אך ייתכן שיש לפסול אחד מהם.
הדרך להחליט היא לבדוק את a_1 ואת a_n ולראות אם הם מתאימים לתנאי השאלה (והגיוניים).

סכום המקומות האי-זוגיים והזוגיים בסדרה הנדסית

בצורה כללית יש לחלק את הבעיה לשלושה חלקים: -
הסדרה המקורית, סדרת המקומות האי-זוגיים וסדרת המקומות הזוגיים.

א. כאשר בסדרה ההנדסית – המקורית יש מספר זוגי של איברים (2n איברים)

1. בסדרת המקומות האי-זוגיים הסכום יהיה:

$$S_n = \frac{a_1\left(\left(q^2\right)^n - 1\right)}{q^2 - 1}$$

שימו לב!
מנת הסדרה המקורית היא כעת q^2 (במקום q) ומספר האיברים הפך ל- n במקום 2n.

2. בסדרת המקומות הזוגיים הסכום יהיה:

$$S_n = \frac{a_2\left(\left(q^2\right)^n - 1\right)}{q^2 - 1}$$

שימו לב!
* בנוסחה משתמשים ב- a_2 במקום ב- a_1 : $a_2 = a_1q$, האיבר השני בסדרה המקורית הוא האיבר הראשון בסדרה הזוגית.
מנת הסדרה המקורית היא כעת q^2 (במקום q) ומספר האיברים הפך ל- n במקום 2n.
* לא לשכוח להכפיל ב- 2 את n על-מנת למצוא את מספר האיברים הנכון (2n).

ב. כאשר בסדרה ההנדסית – המקורית יש מספר אי-זוגי של איברים (2n +1 איברים)

1. בסדרת המקומות האי-זוגיים הסכום יהיה:

$$S_{n+1} = \frac{a_1\left(\left(q^2\right)^{n+1} - 1\right)}{q^2 - 1}$$

שים לב!
מנת הסדרה המקורית היא כעת q^2 (במקום q) ומספר האיברים הפך ל- n+1 במקום 2n+1.

2. בסדרת המקומות <u>הזוגיים</u> הסכום יהיה: $$S_n=\frac{a_2\left(\left(q^2\right)^n-1\right)}{q^2-1}$$

<u>שים לב!</u>

בנוסחה משתמשים ב- a_2 במקום ב- a_1 : $a_2=a_1q$, האיבר השני בסדרה המקורית הוא האיבר הראשון בסדרה הזוגית.

מנת הסדרה המקורית היא כעת q^2 (במקום q) ומספר האיברים הפך ל- n במקום 2n.

<u>סכום של סדרה הנדסית שהחליפו לה את סימני האיברים במקומות הזוגיים / האי-זוגיים</u>

א. נתונה סדרה הנדסית בעלת מספר זוגי של איברים (2n) והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות <u>האי-זוגיים</u>.

הסדרה המקורית:- $a_1 , a_2 , a_3 ,......., a_{2n}$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה: - $-a_1 , a_2 , -a_3 , a_4 ,......., a_{2n}$

$$S_{2n}=\frac{(-a_1)\left((-q)^{2n}-1\right)}{(-q)-1}$$

<u>שימו לב!</u>

מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה $-q$ ובנוסף: $(-q)^{2n}=q^{2n}$.

ב. נתונה סדרה הנדסית בעלת מספר זוגי של איברים (2n) והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות <u>הזוגיים</u>.

הסדרה המקורית:- $a_1 , a_2 , a_3 ,......., a_{2n}$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה: - $a_1 , -a_2 , a_3 , -a_4 ,......., -a_{2n}$

ולכן סכום 2n האיברים יהיה: $$S_{2n}=\frac{(a_1)\left((-q)^{2n}-1\right)}{(-q)-1}$$

מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה $-q$ ובנוסף: $(-q)^{2n}=q^{2n}$.

<u>סדרות מעורבות</u>

<u>הגדרה:-</u>

סדרות שאיבריהן יוצרים בחלקם סדרה הנדסית ובחלקם סדרה חשבונית נקראות סדרות מעורבות.
בשאלות המדברות על סדרות מעורבות נשתמש בעיקר בכללים המגדירים סדרה חשבונית וסדרה הנדסית:

א. כל איבר בסדרה חשבונית הוא הממוצע החשבוני של שני האיברים הסמוכים לו - $b = \frac{a+c}{2}$

יש לזכור כי בסדרה חשבונית מתקיים: $x\ ,\ \ x+d\ ,\ \ x+2d$

ב. כל איבר בסדרה הנדסית הוא הממוצע ההנדסי של שני האיברים הסמוכים לו - $b^2 = ac$

יש לזכור כי בסדרה הנדסית מתקיים: $x\ ,\ \ x \cdot q\ ,\ \ x \cdot q^2$

בתרגילים מסויימים, חשוב לדעת לבחור באיזו סדרה יוגדרו הנעלמים, על-מנת להקל על הפתרון.

סדרה הנדסית אינסופית יורדת

הגדרה:-

סדרה הנדסית המקיימת את שני התנאים הבאים:

1. בסדרה ההנדסית יש אינסוף איברים.
2. מנת הסדרה ההנדסית q חייבת להיות בתחום $-1 < q < 1$

כאשר מתקיימים שני התנאים הנ"ל, נוסחת סכום אינסוף האיברים היא: $S = \frac{a_1}{1-q}$

סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת שהחליפו לה את סימני האיברים במקומות הזוגיים/האי-זוגיים

א. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות האי-זוגיים.

הסדרה המקורית:- $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 ,.........$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה: - $-a_1 , a_2 , -a_3 , a_4 , -a_5 ,..........$

כעת מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" היא $-q$ והאיבר הראשון הוא $-a_1$ ולכן סכום הסדרה

"מוחלפת הסימנים" יהיה: $S = \frac{-a_1}{1-(-q)} = \frac{-a_1}{1+q}$

שימו לב!
גם הסדרה "מוחלפת הסימנים" הינה סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

ב. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת והחליפו בה את הסימנים של האיברים שבמקומות הזוגיים.

הסדרה המקורית:- $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 ,.........$

הסדרה "מוחלפת הסימנים" תהיה: - $a_1 , -a_2 , a_3 , -a_4 , a_5 ,..........$

כעת מנת הסדרה "מוחלפת הסימנים" היא $-q$ והאיבר הראשון נשאר a_1 ולכן סכום

הסדרה "מוחלפת הסימנים" יהיה: $S = \frac{a_1}{1-(-q)} = \frac{a_1}{1+q}$

ג. אם נעלה בריבוע את כל איברי הסדרה המקורית נקבל : $a_1^2\ ,\ a_2^2\ ,\ a_3^2\ ,\ a_4^2\ ,\ a_5^2\ ,.........$

מנת הסדרה החדשה היא q^2 והאיבר הראשון הוא a_1^2 .

<u>שימו לב!</u> q^2 נמצא ב"תחום המותר": $0 < q^2 < 1$ ולכן סכום הסדרה החדשה יהיה:

$$S = \frac{a_1^2}{1-q^2}$$

כלומר, כל שימוש בנוסחא הכללית לסכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת: $S = \frac{a_1}{1-q}$

מחייב אתכם לבדוק האם עדיין מתקיימים שני התנאים:

1. לסדרה אינסוף איברים.

2. $-1 < q < 1$ (q נמצא עדיין ב"תחום המותר").

נוסחת נסיגה – סדרת נסיגה

<u>הגדרה:-</u>
נוסחא המראה כיצד מתקבל כל איבר באמצעות האיבר הקודם לו.
בדרך-כלל, בנוסחת נסיגה נתון האיבר הראשון a_1 ונוסחא המראה כיצד מתקבל כל איבר מהאיבר הקודם לו. לדוגמא: $a_1 = 2 \qquad , a_{n+1} = a_n + 5n + 3$

הערות:
*** ניתן גם "ללכת אחורה", כלומר למצוא איברים קודמים.**
*** יש לשים לב שאם טועים באחד האיברים – כל שאר האיברים שנמצא יהיו שגויים גם הם.**

<u>המעבר מהאיבר הכללי לכלל הנסיגה</u>

כאשר נתון a_n - האיבר הכללי, ורוצים את נוסחת הנסיגה, יש:-

א. למצוא את a_{n+1} (בכל מקום שרשום n יש לרשום כעת $n+1$)
ב. למצוא את ההפרש $a_{n+1} - a_n$. להפרש זה נקרא $f(n)$: $a_{n+1} - a_n = f(n)$
ג. להעביר את a_n לאגף ימין של המשוואה ולקבל: $a_{n+1} = a_n + f(n)$.
ד. למצוא a_1 על-פי האיבר הכללי הנתון. (במקום n יש להציב 1) ולהשלים את הצורה הכללית של נוסחת הנסיגה: $a_1 = ...$ $\qquad a_{n+1} = a_n + f(n)$.

היות ולסדרה ייתכנו מספר כללי נסיגה, ניתן במקום החיסור בסעיף ב', לבצע למשל חילוק:

נתון: - a_n.
מצא: a_{n+1}

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n)$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$$

מצא את a_1 (מ- a_n הנתון)

מאד מומלץ להשתמש בשיטת החילוק כאשר ב- a_n יש חזקות: יש להקפיד שכל האיברים יהיו <u>שונים מאפס!</u>

<u>הערה:</u>
אם שואלים שאלה הקשורה למציאת שני איברים עוקבים בסדרת נסיגה ונתון ההפרש ביניהם, ניתן להשתמש בכלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + f(n)$ ולומר כי: ההפרש הנתון הוא $f(n)$.

<u>המעבר מכלל הנסיגה לאיבר הכללי</u>

השיטה: יש למצוא מספר איברים על-פי כלל הנסיגה ובהתאם לתוצאות יש למצוא את האיבר הכללי של הסדרה (למצוא את החוקיות).

היות שלא ברור מאליו שהחוקיות שמצאנו נכונה "עד אינסוף", יש להוכיח את האיבר הכללי באמצעות אינדוקציה (שאלון 006 – אינדוקציה התלכדות סדרות).

<u>קיימות שאלות בסדרת נסיגה בנוסח הבא:</u>

לדוגמא:-

נתונה סדרת נסיגה $a_1 = 15$, $a_{n+1} = 2a_n - 4n + 1$.

א. הוכח כי הסדרה b_n המוגדרת על-ידי: $b_n = a_n - 4n - 3$ היא סדרה הנדסית.

תשובה: על-מנת להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית, יש להוכיח שהמנה בין שני איברים סמוכים היא קבועה.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - 4(n+1) - 3}{a_n - 4n - 3} = \frac{(2a_n - 4n + 1) - 4(n+1) - 3}{a_n - 4n - 3} = \frac{2a_n - 8n - 6}{a_n - 4n - 3} = 2$$

התוצאה 2 היא יחס קבוע ולכן סדרה b היא הנדסית (התוצאה היא בעצם ה- q של סדרה b).

ב. מצא נוסחא ל- b_n כפונקציה של n בלבד.

תשובה: על-מנת להכיר את הסדרה ההנדסית יש למצוא את האיבר הראשון שלה - b_1.

מציאת b_1: $b_1 = a_1 - 4 \cdot 1 - 3 = 15 - 4 - 3 = 8$

היות וסדרה b היא הנדסית (כפי שהוכחנו) נשתמש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 2^n$$

ג. מצא נוסחא ל- a_n כפונקציה של n בלבד.

תשובה:

היה נתון: $b_n = a_n - 4n - 3$ ולכן: $a_n = b_n + 4n + 3$.

את b_n הכרנו כאיבר כללי של סדרה הנדסית וכעת נציב: $a_n = 4 \cdot 2^n + 4n + 3$

<u>שימו לב!</u> a_n הוא <u>לא</u> איבר כללי של סדרה חשבונית <u>ולא</u> איבר כללי של סדרה הנדסית כיוון שמתקבלים האיברים הבאים: 15 , 27 , 47 , 83 ,......

ד. מצא נוסחא ל- S_n של סדרת a, כלומר: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$

תשובה:

למציאת הסכום יש "לתרגם" את a_n למרכיביו ולחבר בעמודות. סכום כל עמודה יהיה מוכר כסדרה כלשהי ולכן ניתן יהיה רק אז להשתמש בנוסחאות הסכום של סדרה חשבונית והנדסית בהתאם:

$$a_1 = 4\cdot 2^1 + 4\cdot 1 + 3$$
$$a_2 = 4\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 3$$
$$a_3 = 4\cdot 2^3 + 4\cdot 3 + 3$$
$$a_4 = 4\cdot 2^4 + 4\cdot 4 + 3$$
$$a_5 = 4\cdot 2^5 + 4\cdot 5 + 3$$
$$\vdots$$
$$a_n = 4\cdot 2^n + 4\cdot n + 3$$

שימו לב שאין צורך לחשב את ערכם של האיברים a_1 , a_2 וכו' כי אם נמצא אותם לא נוכל למצוא את הסכום

כעת נחבר את העמודות בהתאם:

$$S_n = 4\left[2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n\right] + 4\left[1 + 2 + 3 + ... + n\right] + \left[3 + 3 + 3.... + 3\right]$$

(סדרה הנדסית) (סדרה חשבונית) (n פעמים 3)

נחשב את הסכום בהתאם: $S_n = 4\cdot\frac{2\left(2^n - 1\right)}{2-1} + 4\cdot\frac{(1+n)n}{2} + 3n$

לאחר כינוס איברים נקבל את התשובה הסופית: $S_n = 2^{n+3} + 2n^2 + 5n - 8$

***הערה:**

במידה והיה צריך להוכיח, בדוגמא אחרת, שסדרת b היא סדרה חשבונית אז יש להוכיח כי:-

$b_{n+1} - b_n$ = קבוע

סדרת נסיגה – מקומות זוגיים ומקומות אי-זוגיים

א. כאשר מבקשים: "הוכח שאיברי סדרה a_n במקומות הזוגיים ו/או האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית", יש להראות כי:

$a_{n+2} - a_n$ = מספר קבוע (שאינו תלוי ב- n)

ב. כאשר מבקשים: "הוכח שאיברי סדרה a_n במקומות הזוגיים ו/או האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית", יש להראות כי:

$\frac{a_{n+2}}{a_n}$ = מספר קבוע (שאינו תלוי ב- n)