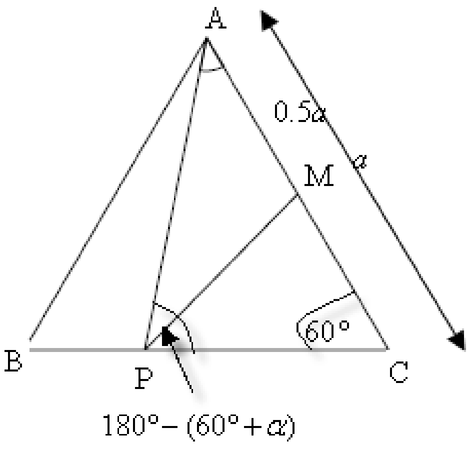
א. משולש ABC **הוא שווה צלעות (נתון)**

$\angle C = 60°$ **(זוויות שוות במשולש שווה צלעות)** $AC = a$ **(נתון)**

$\angle APC = 180° - (60° + \alpha)$ **(סכום זוויות ב-** ΔAPC $180°$**)**

$AM = 0.5AC = 0.5a$ **(נתון וחישוב)**

על פי משפט הסינוסים:



$\underline{\Delta APC}$

$$\frac{AP}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle APC}$$

$$\frac{AP}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin(180° - (60° + \alpha))}$$

$$AP = \frac{a \sin 60°}{\sin(60° + \alpha)}$$

$$AP = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin(60° + \alpha)}$$

$\underline{\Delta APM}$

$$S_{\Delta APM} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AM \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\Delta APM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2\sin(60° + \alpha)} \cdot 0.5a$$

$$\boxed{S_{\Delta APM} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8\sin(60° + \alpha)}}$$

תשובה: $S_{\Delta APM} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8\sin(60° + \alpha)}$ **יח"ר.**

ב. נתון ששטח המשולש APM **הוא** $\frac{1}{4}$ **משטח המשולש** ABC**.**

PM **הוא תיכון לצלע** AC **במשולש** APC**, ולכן ששטח משולש** APM **הוא** $\frac{1}{2}$ **משטח המשולש** APC**,**

כי לשני המשולשים גובה משותף לצלעות AM **ו-** AC**.**

בהתאם נקבל ששטח המשולש APC **הוא** $\frac{1}{2}$ **משטח המשולש** ABC**.**

מסקנה: AP **הוא תיכון לצלע** BC **במשולש** ABC**.**

כיוון שתיכון במשולש שווה צלעות הוא גם חוצה זווית, הרי ש- $\alpha = \frac{60°}{2} = 30°$

תשובה: $\alpha = 30°$**.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה $y=\cos^2 x-a\cos x$ **בתחום** $0\le x\le 2p$**.**

ידוע כי בנקודה שבה $x=\frac{p}{3}$ **יש לפונקציה נקודת מינימום, לכן** $y'(\frac{p}{3})=0$

$$y'=-2\cos x\sin x+a\sin x$$

$$0=-2\cos\frac{p}{3}\sin\frac{p}{3}+a\sin\frac{p}{3}$$

$$0=\sin\frac{p}{3}(-2\cos\frac{p}{3}+a)$$

$$0=-2\cdot 0.5+a$$

$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$

ב. נציב $a=1$ **ונקבל** $y=\cos^2 x-\cos x$, **בתחום** $0\le x\le 2p$**.**

נמצא נקודות קצה ולאחר מכן נקודות קיצון.

$$y(0)=\cos^2 0-\cos 0=0\quad\to(0,0),\quad y(2p)=\cos^2 2p-\cos 0=2p\quad\to(2p,0)$$

$$\boxed{f'(x)=-2\sin x\cos x+\sin x}$$

$$0=-2\sin x\cos x+\sin x$$

$$0=\sin x(-2\cos x+1)$$

$$\sin x=0\qquad\cos x=0.5=\cos\frac{p}{3}$$

$$x=pk\qquad x=\frac{p}{3}+2pk\quad x=-\frac{p}{3}+2pk$$

k	$x=pk$	$x=\frac{p}{3}+2pk$	$x=-\frac{p}{3}+2pk$
0	**קצה** 0	$x=\frac{p}{3}$	
1	p		$x=\frac{5p}{3}$
2	**קצה** $2p$		

$$y(p)=\cos^2 p-\cos p=2\quad\to(p,2),$$

$$y(\frac{p}{3})=\cos^2\frac{p}{3}-\cos\frac{p}{3}=-0.25\quad\to(\frac{p}{3},-0.25)$$

$$y(\frac{5p}{3})=\cos^2(\frac{5p}{3})-\cos(\frac{5p}{3})=-0.25\quad\to(\frac{5p}{3},-0.25)$$

נכתב ע"י עפר ילין

נמצא את סוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$-\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y	0		-0.25		0		-0.25		0
y'									0
מסקנה	**Max**	↘	**Min**	↗	**Max**	↘	**Min**	↗	**Max**

תשובה: $(2\pi, 0)$ **מקסימום ,** $(\frac{5\pi}{3}, -0.25)$ **מינימום ,** $(\pi, 2)$ **מקסימום ,** $(\frac{\pi}{3}, -0.25)$ **מינימום,** $(0, 0)$ **מקסימום.**

ג. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x = 0$ **ובהתאם** $(0, 0)$**, כפי שנמצא קודם.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y = 0$ **ובהתאם** $y = \cos^2 x - \cos x$

$$0 = \cos x(\cos x - 1)$$

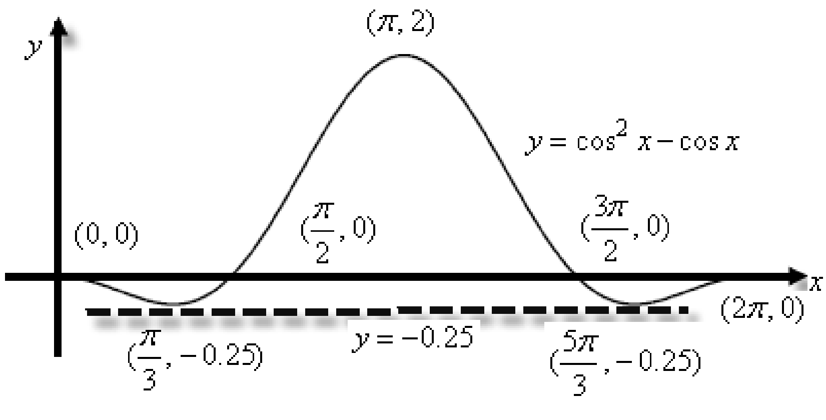
$$\cos x = 0 \qquad \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \qquad x = 2\pi k$$

k	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = 2\pi k$
0	$x = \frac{\pi}{2}$	0
1	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$

תשובה: $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ **,** $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ **,** $(2\pi, 0)$

ד. והסקיצה המתאימה:



ה. המשוואה $\cos^2 x - \cos x = k$ **זהה למשוואה** $y = k$

על פי גרף הפונקציה ניתן לראות שעבור $k = -0.25$ **נקבל שני פתרונות, התואמים את הנתון לפיו** $k < 0$

(שני פתרונות יתקבלו גם עבור $0 < k < 2$ **, אך ערך זה לא נמצא בתחום הנתון,** $k < 0$ **)**

תשובה: $k = -0.25$

נכתב ע"י עפר ילין

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{x+a}$. a פרמטר שונה מ- 0 ($a\neq 0$).

תחום ההגדרה הוא $x\neq -a$, כי $x=-a$ מאפס את מכנה הפונקציה.

תשובה: $x\neq -a$.

(2)הַרְאֵה כי הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה שלה.

$$\boxed{f(x)=\frac{ax}{x+a}}$$

$$f'(x)=\frac{a(x+a)-ax}{(x+a)^2}=\frac{ax+a^2-ax}{(x+a)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{a^2}{(x+a)^2}}$$

כיוון שנתון כי $a\neq 0$, ומכנה הנגזרת חיובי לכל $x\neq -a$,

תשובה: הוּכַח.

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$ ולכן $0=\frac{ax}{x+a}\ \rightarrow x=0\ \leftarrow a\neq 0$

תשובה: $(0,0)$.

(4) $x=-a$ האסימפטוטות האנכיות, כי $x=-a$ מאפס מכנה ולא מונה.

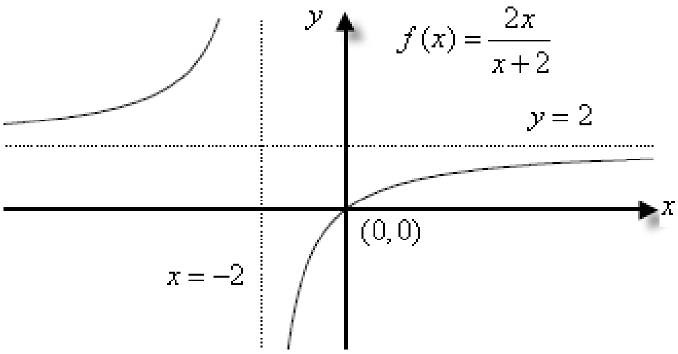
חזקת פולינום המונה (1) שווה חזקת פולינום המכנה (1)

ולכן הפונקציה שואפת לישר $y=\frac{a}{1}=a$

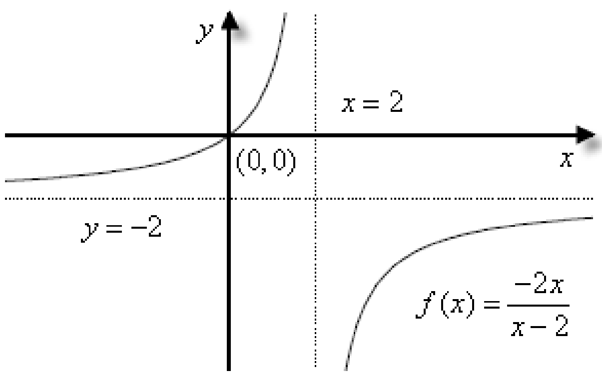
תשובה $x=-a$ אסימפטוטה אנכית, $y=a$ אסימפטוטה אופקית

ב. הסקיצה המתאימה

(1) עבור $a=2$



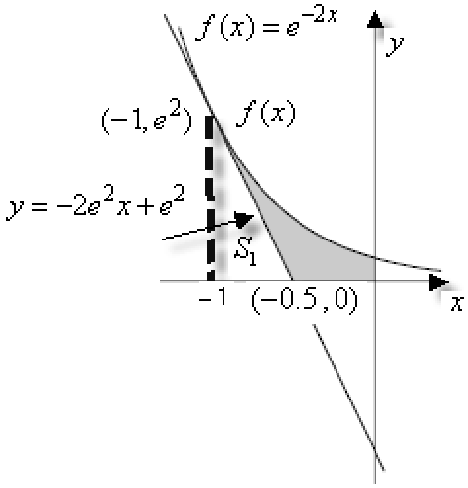
(2) עבור $a=-2$



נכתב ע"י עפר ילין

א. נמצא את נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)=e^{-2x}$ **עם הפונקציה ,** $g(x)=2e^{1-x}-e^{2}$ **.**

$$e^{-2x}=2e^{1-x}-e^{2}$$
$$e^{-2x}=2ee^{-x}-e^{2} \quad \boxed{e^{-x}=t}$$
$$t^{2}=2et-e^{2}$$
$$t^{2}-2et+e^{2}=0$$
$$(t-e)^{2}=0$$
$$t=e$$
$$e^{-x}=e^{1}$$
$$x=-1 \quad \rightarrow y=e^{-2(-1)}=e^{2}$$
$$\boxed{(-1,e^{2})}$$



תשובה: $(-1,e^{2})$ **.**

ב. נוריד אנך מנקודת ההשקה, ומחשב את השטח בין $f(x)=e^{-2x}$ **לציר ה-** x **בגבולות** $x=0,-1$

ונפחית ממנו את שטח המשולש מצד שמאל S_1

(ניתן לחשב גם בדרכים אחרות, ע"י תוספת של המשולש משמאל, או של המשולש הצמוד לציר ה- y **).**

השטח בין $f(x)=e^{-2x}$ **לציר ה-** x

בגבולות $x=0,-1$

$$S=\int_{-1}^{0}(e^{-2x}-0)dx$$
$$S=\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_{-1}^{0}$$
$$S=\frac{e^{-2\cdot 0}}{-2}-\frac{e^{-2\cdot(-1)}}{-2}$$
$$S=-\frac{1}{2}+\frac{e^{2}}{2}=3.1945$$

שטח המשולש S_1

מציאת משוואת המשיק, בנקודה $(-1,e^{2})$ **:**

$$f(x)=e^{-2x} \quad \rightarrow f'(x)=-2e^{-2x}$$
$$m=f'(-1)=-2e^{-2(-1)}=-2e^{2}$$
$$y-e^{2}=-2e^{2}(x+1) \quad \rightarrow y=-2e^{2}x+e^{2}$$

מציאת נקודת החיתוך עם ציר ה - x

$$0=-2e^{2}x+e^{2} \quad /:e^{2}\neq 0$$
$$0=-2x+1 \quad \rightarrow x=-0.5 \quad \rightarrow (-0.5\,,0)$$

חישוב שטח המשולש

$$S_1=\frac{(-0.5-(-1))\cdot e^{2}}{2}= \quad \rightarrow S_1=\frac{0.5\cdot e^{2}}{2}$$
$$S_1=\frac{e^{2}}{4}=1.8743$$

וגודל השטח המבוקש: $(3.1945-1.8743=1.3742)$ $-\frac{1}{2}+\frac{e^{2}}{2}-\frac{e^{2}}{4}=\frac{e^{2}}{4}-\frac{1}{2}$

תשובה: $\frac{e^{2}}{4}-\frac{1}{2}$ **יח"ר (או** 1.3742 **יח"ר).**

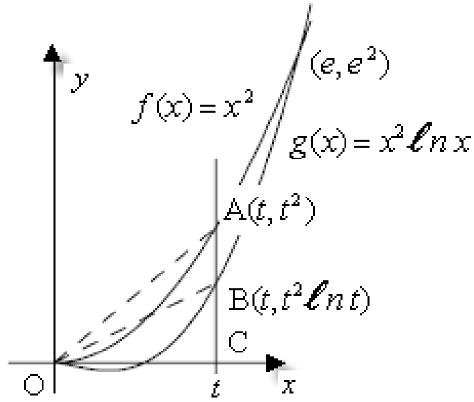
א. נזהה את הפונקציות בציור.

$f(x)=x^2$ **היא פרבולה שקדקודה בראשית הצירים והיא אי-שלילית,**

בעוד ש- $g(x)=x^2\ln x$ **שלילית עבור** $0<x<1$ **.**

לכן בתחום $0<t<e$ **הגרף שלה מעל לגרף של** $g(x)=x^2\ln x$ **(הן נחתכות בנקודה** (e,e^2) **)**

ב. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא שטח המשולש AOB **.**



שיעורי הנקודה A **שעל** $f(x)=x^2$ **הם** $A(t,t^2)$

ונביע באמצעות t **את שטח המשולש** AOB **.**

מכיוון ו- AB **מקביל לציר ה-** y **, הרי ששיעורי ה-** x **שווים ובהתאם** $B(t,t^2\ln t)$

ומכאן ש- $AB=t^2-t^2\ln t$ **.**

כיוון שהמשולש AOB **קהה זווית, הרי שהגובה לצלע** AB **הוא גובה חיצוני** OC **.**

ומכאן ש- $OC=t-0=t$

$$S(t)=0.5(t^2-t^2\ln t)t$$

$$\boxed{S(t)=0.5t^3-0.5t^3\ln t}$$

$$S'(t)=1.5t^2-(1.5t^2\ln t+\frac{0.5t^3}{t})$$

$$S'(t)=1.5t^2-1.5t^2\ln t-0.5t^2$$

$$\boxed{S'(t)=t^2-1.5t^2\ln t}$$

$$0=t^2-1.5t^2\ln t \quad /:t^2>0$$

$$0=1-1.5\ln t$$

$$1=1.5\ln t$$

$$\ln t=\frac{2}{3} \quad \to t=e^{\frac{2}{3}}=1.95$$

$$\boxed{t=\sqrt[3]{e^2}}$$

נכתב ע"י עפר ילין

$S'(1.9) = 1.9^2 - 1.5 \cdot 1.9^2 \ln 1.9 = 0.13 > 0$

$S'(2) = 2^2 - 1.5 \cdot 2^2 \ln 2 = -0.16 < 0$

x	e	2	$\sqrt[3]{e^2}$	1.9	0
$f'(x)$		-	0	+	
מסקנה		↘	Max	↗	

$t = \sqrt[3]{e^2}$ **יביא שטח המשולש** AOB**.**

תשובה: $t = \sqrt[3]{e^2}$

ב. נציב $t = \sqrt[3]{e^2}$ **בפונקציית השטח ונקבל:**

$$S(\sqrt[3]{e^2}) = 0.5(\sqrt[3]{e^2})^3 - 0.5(\sqrt[3]{e^2})^3 \ln(\sqrt[3]{e^2})$$

$$S(\sqrt[3]{e^2}) = 0.5e^2 - 0.5e^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{e^2}{6}$$

תשובה: השטח המקסימלי של משולש AOB **הוא** $\frac{e^2}{6}$ **יח"ר**

נכתב ע"י עפר ילין