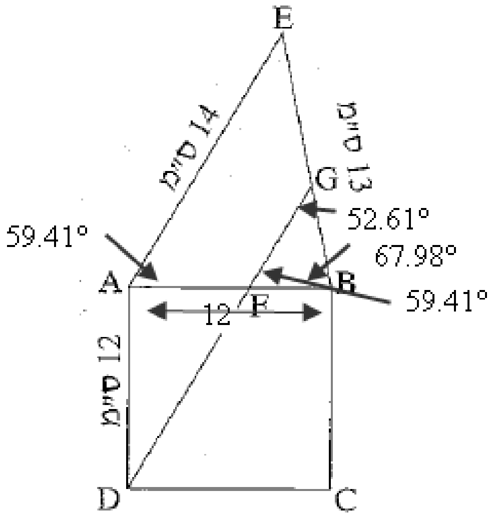
א. נשתמש במשפט הקוסינוסים

האורך של צלע הריבוע הוא 12 **ס"מ, לכן** 12 **ס"מ** $AB=$,



$\underline{\Delta ABE}$

$(AE)^2=(BE)^2+(AB)^2-2BE\cdot AB\cdot\cos\sphericalangle EBA$

$14^2=13^2+12^2-2\cdot13\cdot12\cdot\cos\sphericalangle EBA$

$196=313-312\cos\sphericalangle EBA$

$\cos\sphericalangle EBA=\dfrac{117}{312}$

$\boxed{\sphericalangle EBA=67.98^\circ}$

נשתמש במשפט הסינוסים

$\underline{\Delta ABE}$

$\dfrac{AE}{\sin\sphericalangle EBA}=\dfrac{EB}{\sin\sphericalangle EAB}$

$\dfrac{14}{\sin 67.98^\circ}=\dfrac{13}{\sin\sphericalangle EAB}$

$\sin\sphericalangle EAB=\dfrac{13\sin 67.98^\circ}{14}$

$\boxed{\sphericalangle EAB=59.41^\circ}\ \leftarrow\ 0^\circ<\sphericalangle EAB<90^\circ$

נתון כי $FG\parallel AE$ **ולכן** $\sphericalangle GFB=\sphericalangle EAB=59.41^\circ$

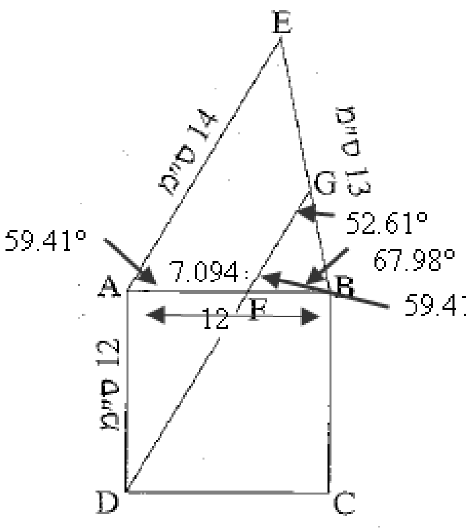
(זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים)

ומכאן, ע"פ סכום זוויות במשולש FGB 180°

נקבל: $\sphericalangle FGB=180^\circ-(59.41^\circ+67.98^\circ)=52.61^\circ$

תשובה: 52.61° , 67.98° , 59.41°.

ב. $\sphericalangle AFD=\sphericalangle GFB=59.41^\circ$ **(זוויות קדקודיות שוות זו לזו)**



$\underline{\Delta AFD}$

$\tan\sphericalangle AFB=\dfrac{AD}{AF}$

$\tan 59.41^\circ=\dfrac{12}{AF}$

$AF=7.094$

$FB=12-7.094=4.906$

$\boxed{FB=4.906}$

תשובה: 4.906 **ס"מ** $FB=$

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin(ax)$ **בתחום** $0\le x\le \frac{2\pi}{3}$. a **הוא פרמטר,** $0<a<9$.

ישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{6}$ **, מקביל לציר ה-** x **,**

לכן: $f'(\frac{\pi}{6})=0$

$$f'(x)=a\cos(ax)$$

$$0=a\cos(a\cdot\frac{\pi}{6})/:a\ne 0$$

$$\cos(a\cdot\frac{\pi}{6})=0=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$a\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad a\cdot\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad /:\pi$$

$$\frac{a}{6}=\frac{1}{2}+2k \qquad \frac{a}{6}=-\frac{1}{2}+2k \qquad /\cdot 6$$

$$a=3+12k \qquad a=-3+12k$$

$$\boxed{a=3}\leftarrow \quad k=0,\quad 0<a<9$$

תשובה: $a=3$

ב. נציב $a=3$ **ונקבל:** $\boxed{f(x)=\sin 3x}$ **בתחום** $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$.

נמצא נקודות קצה ולאחר מכן נקודות קיצון.

$$f(0)=\sin(3\cdot 0)=0 \quad\to(0,0)$$

$$f(\frac{2\pi}{3})=\sin(3\cdot\frac{2\pi}{3})=0 \quad\to(\frac{2\pi}{3},0)$$

$$\boxed{f'(x)=-3\cos 3x}$$

$$\cos 3x=0=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$3x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \qquad 3x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3} \qquad x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$$

k	$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$	$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$
0	$\frac{\pi}{6}$	-
1	-	$\frac{\pi}{2}$

$$f(\frac{\pi}{2})=\sin(3\cdot\frac{\pi}{2})=-1 \quad\to(\frac{\pi}{2},-1)$$

$$f(\frac{\pi}{6})=\sin(3\cdot\frac{\pi}{6})=1 \quad\to(\frac{\pi}{6},1)$$

נמצא את סוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
y	0		1		-1		0
y'							0
מסקנה	**Min**	↗	**Max**	↘	**Min**	↗	**Max**

תשובה: $(\frac{\pi}{2},-1)$ **מינימום מוחלט,** $(\frac{\pi}{6},1)$ **מקסימום מוחלט (על פי ערכי הפונקציה בקצוות ובנקודות הקיצון)**

נכתב ע"י עפר ילין

ג. נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

$$\sin 3x = 0 = \sin 0$$

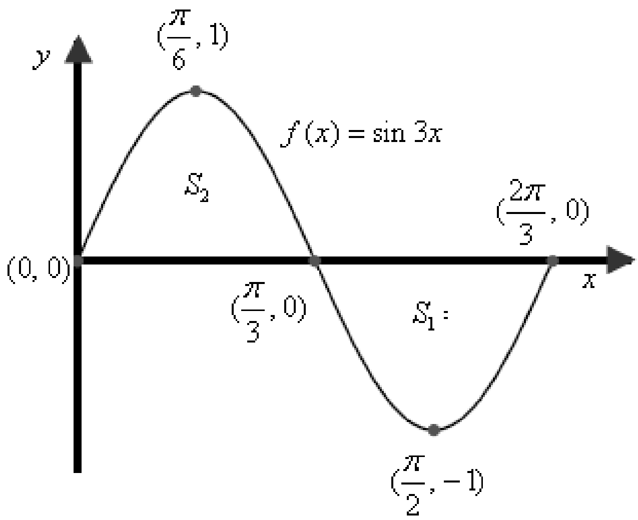
$$3x = 0 + 2pk \quad 3x = p + 2pk$$

$$x = \frac{2pk}{3} \quad x = \frac{p}{3} + \frac{2pk}{3}$$

k	$x = \frac{2pk}{3}$	$x = \frac{p}{3} + \frac{2pk}{3}$
0	0	$\frac{p}{3}$
1	$\frac{2p}{3}$	

תשובה: $(0, 0), (\frac{p}{3}, 0), (\frac{2p}{3}, 0)$

ד. סרטוט הפונקציה



ג. נחשב את שני השטחים המתאימים:

$$S_1 = \int_{\frac{p}{3}}^{\frac{2p}{3}} (0 - \sin 3x)dx$$

$$S_1 = \frac{\cos 3x}{3} \Big]_{\frac{p}{3}}^{\frac{2p}{3}}$$

$$S_1 = \left(\frac{\cos(3 \cdot \frac{2p}{3})}{3}\right) - \left(\frac{\cos(3 \cdot \frac{p}{3})}{3}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3})$$

$$\boxed{S_1 = \frac{2}{3}}$$

$$S_2 = \int_{0}^{\frac{p}{3}} (\sin 3x - 0)dx$$

$$S_2 = -\frac{\cos 3x}{3} \Big]_{0}^{\frac{p}{3}}$$

$$S_2 = \left(\frac{-\cos(3 \cdot \frac{p}{3})}{3}\right) - \left(\frac{-\cos(3 \cdot 0)}{3}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3})$$

$$\boxed{S_2 = \frac{2}{3}}$$

וגודל השטח הוא $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

תשובה: $1\frac{1}{3}$ **יח"ר.**

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונה פונקציה $f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}-1$ **.**

תחום ההגדרה הוא $x\neq1$ **, כי** $x=1$ **מאפס את מכנה הפונקציה.**

תשובה: $x\neq1$ **.**

ב. $x=1$ **האסימפטוטה האנכית, כי** $x=1$ **מאפס מכנה ולא מונה.**

חזקת המונה בביטוי $\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}$ (2) **שווה לחזקת המכנה** (2) **ולכן ביטוי זה שואף ל-** 1**, עבור** x **השואפים ל-** ∞ **.**

אולם, יש להתחשב ב -1 **החופשי,**

ולכן עבור x **השואפים ל-** ∞ **נקבל ש-** $f(x)$ **שואפת ל-** $1-1=0$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית**

אפשר גם לעשות מכנה משותף לפונקציה ולראות זאת ביתר קלות:

$$f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}-1=\frac{(x+2)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2+4x+4-x^2+2x-1}{(x-1)^2}=\frac{6x+3}{(x-1)^2}$$

תשובה $x=1$ **אסימפטוטה אנכית,** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית**

ג. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ולכן** $f(0)=\frac{(0+2)^2}{(0-1)^2}-1=3$ **שיעורי נקודת החיתוך** $(0,3)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ולכן** $0=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}-1$

$$0=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}-1$$

$$\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}=1$$

$$(x+2)^2=(x-1)^2$$

$$x^2+4x=4=x^2-2x+1$$

$$6x=-3$$

$$x=-0.5 \quad \to(-0.5,0)$$

תשובה: $(0,3)$ **,** $(-0.5,0)$ **.**

ד. נמצא את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

$$\boxed{f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}-1}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+2)(x-1)^2-2(x-1)(x+2)^2}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+2)(x-1)(x-1-(x+2)}{(x-1)^4}$$

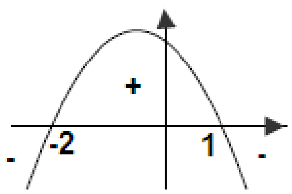
$$f'(x)=\frac{2(x+2)(x-1)(x-1-x-2)}{(x-1)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-6(x+2)(x-1)}{(x-1)^4}}$$

$x=-2$ **הפתרון היחיד בתחום ההגדרה,** $x\neq 1$ **, ובהתאם** $f(-2)=\frac{(-2+2)^2}{(-2-1)^2}-1=-1$ **:**

נמצא את סוג נקודות הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי), בעזרת ציור גרף סימני $f'(x)$ **,**

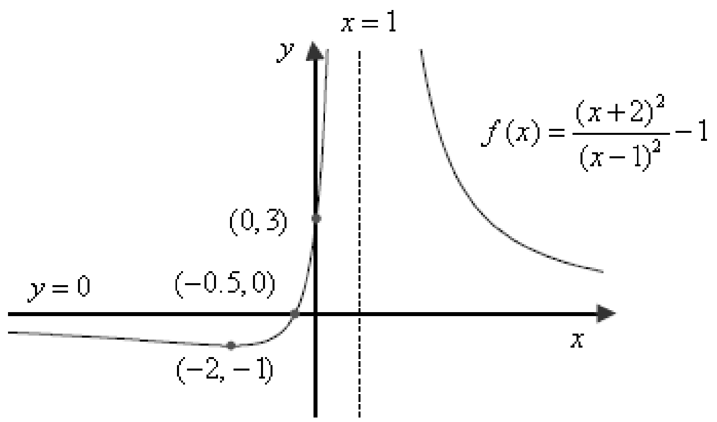
כאשר מכנה הנגזרת חיובי והמונה הוא ביטוי אלגברי של פרבולה הפוכה (עצובה).



	-2		1		x
-	0	+		-	$f'(x)$
↘	**Max**	↗		↘	**מסקנה**

תשובה: $(-2,-1)$ **מינימום.**

ה. הסקיצה המתאימה



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x-5}$ **.**

הביטוי שבתוך השורש אינו יכול להיות שלילי, בהתאם $x-5\geq 0 \quad \rightarrow \boxed{x\geq 5}$

תשובה: $x\geq 5$

ב. נמצא את משוואת המשיק.

$f(14)=\sqrt{14-5}=3$ **ובהתאם שיעורי נקודת ההשקה** $A(14, 3)$ **.**

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-5}} \quad \rightarrow f'(14)=\frac{1}{2\sqrt{14-5}}=\frac{1}{6}$$

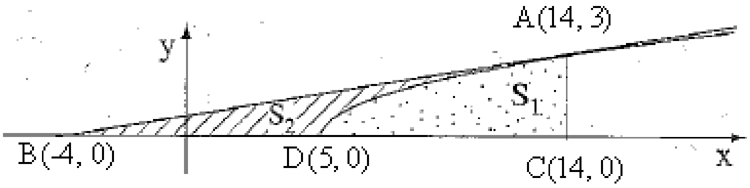
$$y-3=\frac{1}{6}(x-14) \quad \rightarrow 6y-18=x-14$$

$$\boxed{x-6y+4=0}$$

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- x **, בה מתקיים** $y=0$ **.**

$$x-6\cdot 0+4=0 \quad \rightarrow x=-4 \quad \rightarrow B(-4, 0)$$

תשובה: $(-4, 0)$



ג. על פי תחום ההגדרה שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה

עם ציר ה- x **הם** $D(5, 0)$

$$S_1=\int_5^{14}(\sqrt{5-x})dx$$

$$S_1=\int_5^{14}(x-5)^{0.5}dx$$

$$S_1=\frac{(x-5)^{1.5}}{1.5}\Big]_5^{14}$$

$$S_1=\left(\frac{(14-5)^{1.5}}{1.5}\right)-\left(\frac{(5-5)^{1.5}}{1.5}\right)$$

$$S_1=18-0$$

$$\boxed{S_1=18}$$

$$S_2=S_{\Delta ABC}-S_1$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{18\cdot 3}{2}=27$$

$$S_2=27-18$$

$$\boxed{S_2=9}$$

והיחס המבוקש: $\frac{S_1}{S_1}=\frac{18}{9}=2$

תשובה: $\frac{S_1}{S_1}=2$

נכתב ע"י עפר ילין

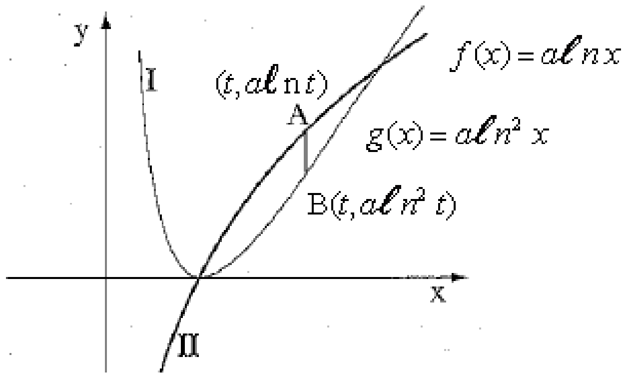
א. נזהה את הפונקציות, $f(x)=a\ln x$ **,** $g(x)=a\ln^2 x$ **, בהתאם לכך שאחת עולה ולשנייה יורדת ועולה.**

$f'(x)=\frac{a}{x}$ **וכיוון ש:** $x>0$ **,** $a>0$ **הרי שהפונקציה עולה לכל** $x>0$ **.**

לחילופין, כיוון ש- $a>0$ **הרי ש-** $g(x)=a\ln^2 x\geq 0$ **לכל** $x>0$ **ומתאימה לגרף שמשיק לציר ה-** x **.**

תשובה: הגרף I **הוא של הפונקציה** $f(x)$ **, והגרף** II **הוא של הפונקציה** $g(x)$ **.**

ב. (1) הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* היא אורך הקטע AB **.**



נסמן את הנקודה A **עם השיעורים** $\mathrm{A}(t,a\ln t)$ **ונביע באמצעות** t **את אורך הקטע** AB **.**

מכיוון ו- AB **מקביל לציר ה-** y **, הרי ששיעורי ה-** x **שווים ובהתאם** $\mathrm{B}(t,a\ln^2 t)$

ומכאן ש- $\boxed{\mathrm{AB}=a\ln t-a\ln^2 t}$

$$(\mathrm{AB})'(t)=\frac{a}{t}-\frac{2a\ln t}{t}$$

$$\boxed{(\mathrm{AB})'(t)=\frac{a-2a\ln t}{t}}$$

$$0=a-2a\ln t \quad /:a>0$$

$$0=1-2\ln t$$

$$\ln t=0.5$$

$$\boxed{t=\sqrt{e}}$$

נוכיח קיצון בעזרת נגזרת שנייה מקוצרת לצורכי סימן, בנקודה חשודה כקיצון, כאשר מכנה הנגזרת חיובי.

$f''(t)=-\frac{2a}{t}<0 \quad \rightarrow Max$ **(הנגזרת השנייה שלילית בכל תחום ההגדרה** $t>0$ **)**

$t=\sqrt{e}$ **יביא את אורך הקטע** AB **למקסימום**

$$\mathrm{A}(\sqrt{e},a\ln\sqrt{e}) \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{A}(\sqrt{e},0.5a)}$$

$$\mathrm{B}(\sqrt{e},a\ln^2\sqrt{e}) \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{B}(\sqrt{e},0.25a)}$$

ובהתאם: האורך המקסימלי של הקטע AB **הוא** $0.5a-0.25a=0.25a$

תשובה: $0.25a$

נכתב ע"י עפר ילין

(2). נתון כי $g(\sqrt{e})=\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}=a\ln^2\sqrt{e}$$

$$\frac{1}{4}=a\cdot\frac{1}{4}$$

$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$ **.**

נכתב ע"י עפר ילין