א. $ABCD$ **טרפז שווה שוקיים ,** $AB \parallel DC$ **,** $AD = BC$ **(נתון).**

4 **ס"מ** $AB =$ **(נתון) ,** $3\sqrt{3}$ **ס"מ** $h =$ **גובה הטרפז (נתון) ,** $\sphericalangle ABC = 120°$ **(נתון)**

$ABCD$ **טרפז שווה שוקיים ,** $AB \parallel DC$ **,** $AD = BC$ **(נתון),** $BC = EC$ **(נתון),.**

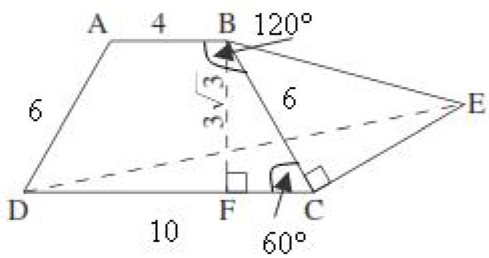
(1) נוריד גובה BF **לבסיס הגדול.** $\sphericalangle BCF = 60°$ **(זוויות חד צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות ל-** $180°$**).**

$\underline{\Delta BCF}$ **(ישר זווית,** $\sphericalangle F = 90°$)

$$\sin \sphericalangle BCF = \frac{BF}{BC}$$

$$BC = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 60°}$$

$$\boxed{BC = 6}$$



תשובה:אורך השוק של הטרפז הוא 6 **ס"מ.**

(2) $EC = BC = 6$ **.**

$DC = AB + 2CF$ **, כי שני המשולשים שנוצרים על ידי שני גבהי הטרפז חופפים זה לזה.**

$\underline{\Delta BCF}$ **(ישר זווית,** $\sphericalangle F = 90°$)

$$\tan \sphericalangle BCF = \frac{BF}{CF}$$

$$CF = \frac{3\sqrt{3}}{\tan 60°}$$

$$\boxed{CF = 3}$$

ובהתאם: 10 **ס"מ** $DC =$, **וכמו כן** $\sphericalangle DCE = 60° + 90° = 150°$

נמצא את DE **במשולש , באמצעות משפט הקוסינוסים.**

$$(DE)^2 = (DC)^2 + (CE)^2 - 2DC \cdot CE \cdot \cos \sphericalangle DCE$$

$$(DE)^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 150°$$

$$(DE)^2 = 239.92$$

$$\boxed{DE = 15.49}$$

תשובה: 15.49 **ס"מ** $DE =$ **.**

ב. $\sphericalangle BED = \sphericalangle BEC - \sphericalangle DEC$ **, כאשר** $\sphericalangle BEC = 45°$ **(זווית בסיס במשולש ישר זווית ושווה שוקיים,** ΔBCE**).**

$\underline{\Delta DCE}$ **משפט הסינוסים**

$$\frac{DE}{\sin\sphericalangle DCB} = \frac{DC}{\sin\sphericalangle DEC}$$

$$\sin\sphericalangle DEC = \frac{10\sin 150}{15.49}$$

$$\boxed{\sphericalangle DEC = 18.83°} \leftarrow 0 < \sphericalangle DEC < 90°$$

$$\sphericalangle BED = 45° - 18.83° = 26.17°$$

תשובה: $\sphericalangle BED = 26.17°$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x) = x + \cos x$ **בקטע** $0 \le x \le 2®$ **.**

נמצא נקודות קצה ולאחר מכן נקודות קיצון.

$$f(0) = 0 + \cos 0 = 1 \quad \to (0,1)$$
$$f(2®) = 2® + \cos(2®) = 2® + 1 \quad \to (2®,\ 2® + 1)$$

$$\boxed{f'(x) = 1 - \sin x}$$
$$0 = 1 - \sin x$$
$$\sin x = 1$$
$$x = \frac{®}{2} + 2®k$$
$$k = 0 \quad \to x = \frac{®}{2} \quad \to f(\frac{®}{2}) = \frac{®}{2} + \cos\frac{®}{2} = 1 \quad \to (\frac{®}{2}, \frac{®}{2})$$

נמצא את סוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה:

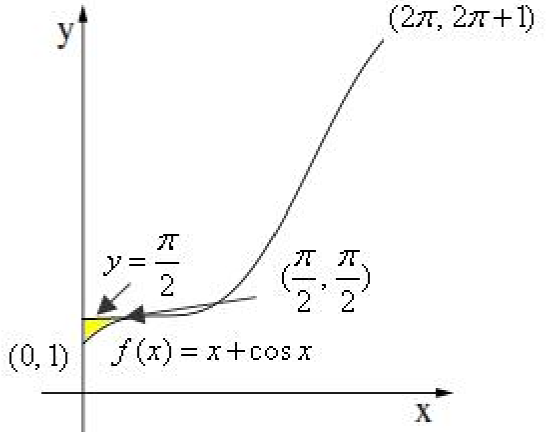
x	0		$\frac{®}{2}$		$2®$
y	1		$\frac{®}{2} = 1.57$		$2® + 1 = 7.28$
מסקנה	**Min**	↗	**פיתול**	↗	**Max**

תשובה: $(0,1)$ **מינימום מוחלט ,** $(2®,\ 2® + 1)$ **מקסימום מוחלט.**

ב. בנקודה שיפוע המשיק הוא 0 **ולכן המשיק מקביל לציר ה-** x **ומשוואתו** $y = \frac{®}{2}$

תשובה: משוואת המשיק היא $y = \frac{®}{2}$ **.**

ג. נחשב את גודל השטח (הצהוב).



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-(x+\cos x))\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x-\cos x))\,dx$$

$$S=(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{2}-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S=(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2}-\sin\frac{\pi}{2})+(\frac{\pi}{2}\cdot 0-\frac{(0)^2}{2}-\sin 0)$$

$$\boxed{S=\frac{\pi^2}{8}-1}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{\pi^2}{8}-1$ **או** 0.234**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x^2-8x}{e^x}$.

תשובה: הפונקציה מוגדרת לכל x .

ב. נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y **:** $x=0$ **וזו הנקודה** $(0,0)$.

נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **:** $y=0$ **ומתקבל** $3x^2-8=0$ **ונקבל** $(2\frac{2}{3}\ 0)$, $(0,0)$.

תשובה: $(0,0)$ **,** $(2\frac{2}{3}\ 0)$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן :

$$\boxed{f(x)=\frac{3x^2-8x}{e^x}}$$

$$f'(x)=\frac{(6x-8)e^x-(3x^2-8x)e^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(6x-8-3x^2+8x)}{e^{2x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^x(-3x^2+14x-8)}{e^{2x}}}$$

$$0=-3x^2+14x-8$$

$$x_{1,2}=\frac{-14\pm10}{-6}$$

$$x=\frac{2}{3}\ \rightarrow y=\frac{3\cdot(\frac{2}{3})^2-8\cdot(\frac{2}{3})}{e^{(\frac{2}{3})}}\ \rightarrow (\frac{2}{3},-2.054)$$

$$x=4\ \rightarrow y=\frac{3\cdot4^2-8\cdot4}{e^4}\ \rightarrow (4,0.293)$$

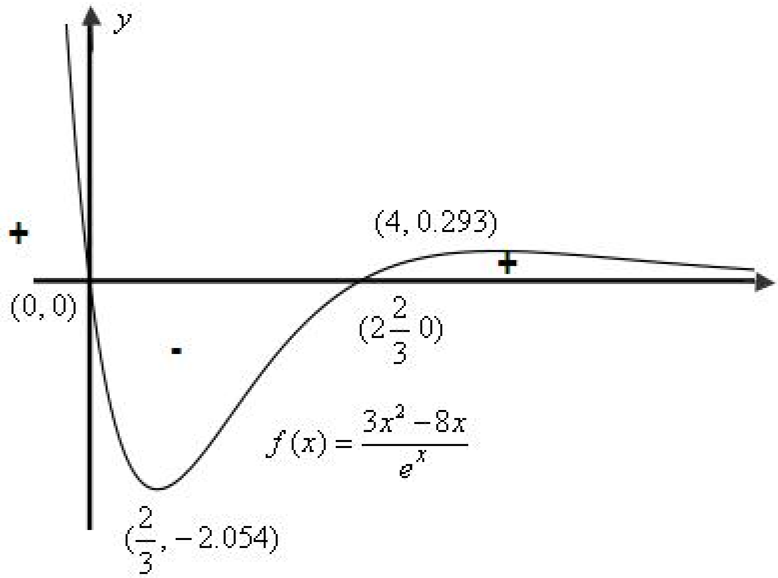
נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה (e^x **חיובי)**

$f'(-3)=2\cdot(-3)+(-3)^2>0,\quad f'(-1)=2\cdot(-1)+(-1)^2<0,\quad f'(1)=2\cdot1+1^2>0$

-3	-2	-1	0	1	x
+	0	-	0	+	y'
↗	**Max**	↘	**Min**	↗	**מסקנה**

תשובה: $(4,0.293)$ **מקסימום ,** $(\frac{2}{3},-2.054)$ **מינימום.**

ד. הסקיצה המתאימה



ה. נתון כי פונקציית הנגזרת של $g(x)$ מקיימת $g'(x)=f(x)$.

על פי הגרף של $f(x)$ ניתן לראות ש- $g'(x)>0$ עבור $x>2\frac{2}{3}$ או $x<0$ וחיובית עבור $0<x<2\frac{2}{3}$.

לכן, $g'(x)$ עוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=0$ ובהתאם $g(x)$ מעלייה לירידה ו- $x=0$ מקסימום.

וגם, $g'(x)$ עוברת משליליות לחיוביות עבור $x=2\frac{2}{3}$ ובהתאם $g(x)$ מירידה לעלייה ו- $x=2\frac{2}{3}$ מינימום.

הערה: בסעיף זה היה נדרש רק להוכיח שקיימות נקודות קיצון, *ללא* קביעת סוג הקיצון.

ובהתאם ניתן להסתפק בעובדה שפונקציית הנגזרת מחליפה סימן.

תשובה: $x=0$, $x=2\frac{2}{3}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$ **בתחום** $x>1$ **ועל כן היא הפונקציה היורדת.**

$x=1$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=1$ **מהווה אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** x **.**

חזקת פולינום המכנה (1) **גדולה מחזקת פולינום המונה** (0)**, לכן הישר** $y=0$ **אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** x **.**

נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$ **בתחום** $x<1$ **ועל כן היא הפונקציה העולה.**

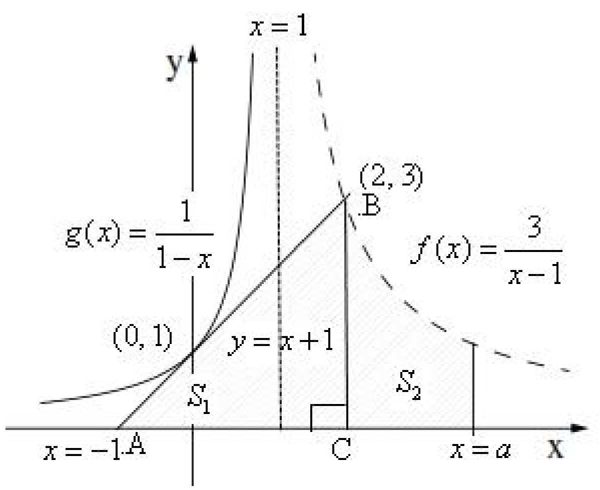
$x=1$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=1$ **מהווה אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** x **.**

חזקת פולינום המכנה (1) **גדולה מחזקת פולינום המונה** (0)**, לכן הישר** $y=0$ **אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** x **.**

תשובה: $f(x)$ **:** $x=1$ **,** $y=0$ **,** $g(x)$ **:** $x=1$ **,** $y=0$ **.**

ב. נמצא את משוואת המשיק לפונקציה $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$ **, בנקודה שבה** $x=0$ **.**

$$g'(x)=-\frac{-1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$g'(0)=1,\ g(0)=1$$
$$y-1=1(x-0)\quad\rightarrow\ \boxed{y=x+1}$$



נשווה בין משוואת המשיק ל- $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$

$$x+1=\frac{3}{x-1}\quad\rightarrow x^2-1=3$$
$$x^2=4\quad\rightarrow x=2\quad\leftarrow x>1$$
$$2+1=3\quad\rightarrow(2,3)$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך הם $(2,3)$ **.**

ג. נחלק את השטח המבוקש, שגודלו 7.5**, לשני שטחים:** S_1 **ו-** S_2**.**

S_1 **הוא משולש ישר זווית (**ΔABC**). נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-** x **.**

$0=x+1$ **ונקבל** $x=-1$ **. לכן,** $S_1=\dfrac{3\cdot3}{2}=4.5$

$$S_2=\int_2^a\left(\frac{3}{x-1}-0\right)dx=3\ell n|x-1|\Big]_2^a$$
$$S_2=3\ell n|a-1|-3\ell n|2-1|=3\ell n|a-1|$$

($a>1$ **כי** $x=a$ **מימין לאסימפטוטה** $x=1$ **), לכן** $\ell n|a-1|=\ell n(a-1)$ **)**

נפתור את המשוואה המתאימה: $3\ell n(a-1)+4.5=7.5$ **ולכן** $\ell n(a-1)=1$ **ו-** $a-1=e$ $\leftarrow$ $\boxed{a=e+1}$

תשובה: $a=e+1$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=4x+x\sqrt{4-x^2}$.

תחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

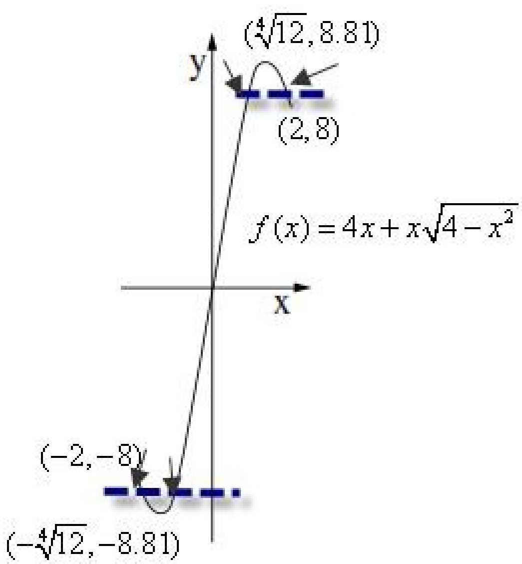
$4-x^2\ge 0 \quad \leftarrow$ $(x-2)(x+2)\ge 0$ **והגרף המתאים של פרבולה בעלת מקסימום, ולכן** $-2\le x\le 2$.

תשובה: $-2\le x\le 2$.

ב. נמצא נקודות הקיצון המוחלט, שעל פי הציור תהיינה נקודות קיצון פנימיות ולא קצה.

$$f(2)=4\cdot 2+2\sqrt{4-2^2}=8 \quad \rightarrow (2,8)$$
$$f(-2)=4\cdot(-2)+2\sqrt{4-(-2)^2}=-8 \quad \rightarrow (-2,-8)$$

$(2,8)$, $(-2,-8)$ **הן נקודות הקצה.**



$$f'(x)=4+\sqrt{4-x^2}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}$$
$$f'(x)=\frac{4\sqrt{4-x^2}+4-x^2-x^2}{\sqrt{x^2-4}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{4\sqrt{4-x^2}+4-2x^2}{\sqrt{x^2-4}}}$$
$$0=4\sqrt{4-x^2}+4-2x^2 \quad \boxed{x^2=t}$$
$$0=4\sqrt{4-t}+4-2t$$
$$2t-4=4\sqrt{4-t} \quad /:2$$
$$t-2=2\sqrt{4-t}$$
$$(t-2)^2=(2\sqrt{4-t})^2$$
$$t^2-4t+4=4(4-t)$$
$$t^2-4t+4=16-4t$$
$$t^2=12$$
$$t=\sqrt{12} \quad \rightarrow \sqrt{12}-2=2\sqrt{4-\sqrt{12}} \quad \rightarrow 1.464=1.464 \quad o.k.$$
$$t=-\sqrt{12} \quad \rightarrow -\sqrt{12}-2=2\sqrt{4-\sqrt{12}} \quad \rightarrow -=+ \quad not \quad o.k.$$
$$t=\sqrt{12} \quad \rightarrow t^2=12 \quad \rightarrow x^4=12 \quad \rightarrow x=\pm\sqrt[4]{12}$$
$$f(\sqrt[4]{12})=4\cdot\sqrt[4]{12}+2\sqrt{4-(\sqrt[4]{12})^2}=8.81 \quad \rightarrow (\sqrt[4]{12},8.81)$$
$$f(-\sqrt[4]{12})=4\cdot(-\sqrt[4]{12})+2\sqrt{4-(-\sqrt[4]{12})^2}=-8.81 \quad \rightarrow (-\sqrt[4]{12},-8.81)$$

תשובה: על פי הציור הנתון $(\sqrt[4]{12},8.81)$ **מקסימום מוחלט ,** $(-\sqrt[4]{12},-8.81)$ **מינימום מוחלט.**

ג. על פי הגרף המצויר, בתחום שבו $k > 0$ הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות,

כאשר $8 \le k < 8.81$

תשובה: $8 \le k < 8.81$**.**