א. נסמן ב- x את מהירות לרוכב האופניים שיצא ממושב A (קמ"ש, קבועה)
נסמן ב- y את מהירות לרוכב האופניים שיצא ממושב B (קמ"ש, קבועה)
נסמן ב- s את המרחק ממושב A עד מושב B (ק"מ)
נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
יום אחד	מ- A עד מפגש	$\frac{3s}{4x}$	x	$\frac{3s}{4}$
	מ- B עד מפגש	$\frac{s}{4y}$	y	$\frac{s}{4}$
יום אחר	מ- A עד מפגש	$\frac{s}{2x}$	x	$\frac{s}{2}$
	מ- B עד מפגש	$\frac{s}{2y}$	y	$\frac{s}{2}$

ביום הראשון זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- B קטן בחצי שעה והמשוואה המתאימה היא $\frac{3s}{4x}=\frac{s}{4y}+0.5$.

ביום האחר זמן הרכיבה של הרוכב שיצא מ- A קטן בחצי שעה והמשוואה המתאימה היא $\frac{s}{2x}+0.5=\frac{s}{2y}$.

$$\begin{cases}\frac{3s}{4x}=\frac{s}{4y}+0.5\\ \frac{s}{2x}+0.5=\frac{s}{2y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}3ys=xs+2xy \quad \rightarrow 2xy=3ys-xs\\ ys+xy=xs \quad \rightarrow xy=xs-ys \quad \rightarrow 2xy=2xs-2ys\end{cases}$$

$$3ys-xs=2xs-2ys \quad /:s>0$$

$$5y=3x$$

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$$

תשובה: היחס בין מהירות הרוכב הראשון למהירות הרוכב השני הוא $5:3$.

ב. כאשר שניהם יוצאים באותו זמן, ויחס המהירויות הוא $5:3$, הרי שייפגשו במרחק $\frac{5}{8}S$ מ- A,

כלומר במרחק של $\frac{1}{8}S$ מאמצע הדרך.

לכן $\frac{1}{8}S=b \quad \rightarrow \boxed{S=8b}$

תשובה: המרחק ממושב A למושב B- הוא $8b$ (ק"מ).

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $1^3=1$ **אגף שמאל:** $1^2=1$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $(1+2+3+...+k)^2=1^3+2^3+3^3+...+k^3$ **,**

או על פי נוסחת סכום של סדרה חשבונית: $(\frac{k(1+k)}{2})^2=1^3+2^3+3^3+...+k^3$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **, לכן צ"ל**

$$(\frac{(k+1)(1+k+1)}{2})^2=\underbrace{1^3+2^3+3^3+...+k^3}_{\downarrow}+(k+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=(\frac{k(1+k)}{2})^2+(k+1)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

Q. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$**, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

ב. נתון כי $1^3+2^3+3^3+...+(2n-1)^3=5,833,225$

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א $(1+2+3+...+t)^2=5,833,225$

ולכן $1+2+3+...+t=1,415$ **, כאשר** $t=2n-1$ **יסמל את מספר המחוברים באגף שמאל**

$$\frac{t(1+t)}{2}=1,415 \quad \to t^2+t-4,830=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm139}{2} \quad \to \boxed{t=69} \quad \leftarrow t>0$$

תשובה: 69 **מחוברים.**

הערה

קיימות שתי נוסחאות של סכומים שראוי לזכור ומסייעות בתרגילי סדרות.

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$ **וגם** $$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

הנוסחה השנייה מוכיחה את הטענה ישירות, אולם *לא* ניתן להשתמש בה כי היא *לא* בתוכנית לימודים, וההוכחה שלה היא תרגיל כשלעצמו בנושא הסדרות.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

פונקציה זוגית אם $f(-x)=f(x)$

$$\cos x=\cos(-x)\quad\rightarrow f(-x)=\frac{1}{\cos(-x)}=\frac{1}{\cos x}=f(x)$$

תשובה: הוכַח.

ב. בתחום $0\le x\le 2\pi$

(1) תחום הגדרה : $x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$ **כי מכנה שונה מ-** 0

ולכן בתוך התחום $x=\frac{3\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}$ **אסימפטוטות אנכיות** $\rightarrow\quad \lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} f(x)=\pm\infty$

תשובה: תחום ההגדרה, $x\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\quad 0\le x\le 2\pi$ **, אסימפטוטות אנכיות** $x=\frac{3\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}$

(2) נמצא את נקודות הקיצון.

נקודות הקצה: $f(0)=\frac{1}{\cos 0}=1\quad\rightarrow(0,1),\quad f(2\pi)=\frac{1}{\cos 2\pi}=1\quad\rightarrow(2\pi,1)$

$$f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\sin x=0\quad\rightarrow x=\pi k$$

ועבור $k=1$ **נקבל נקודה פנימית** $x=\pi$ **החשודה כקיצון** $(\pi,-1)\quad\rightarrow\quad f(\pi)=\frac{1}{\cos\pi}=-1$.

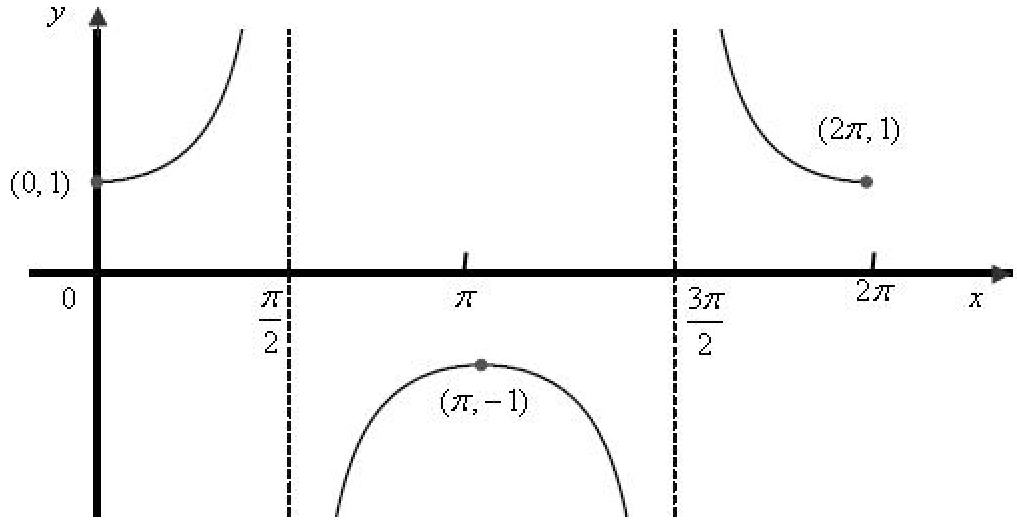
נבנה טבלת עלייה וירידה, בעזרת ערכי הנגזרת, כאשר מכנה הנגזרת חיובי

$$f'(\frac{\pi}{6})=\frac{0.5}{+}>0,\quad f'(\frac{2\pi}{3})=\frac{0.866}{+}>0,\quad f'(\frac{4\pi}{3})=\frac{-0.866}{+}>0,\quad f'(\frac{11\pi}{6})=\frac{-0.5}{+}<0$$

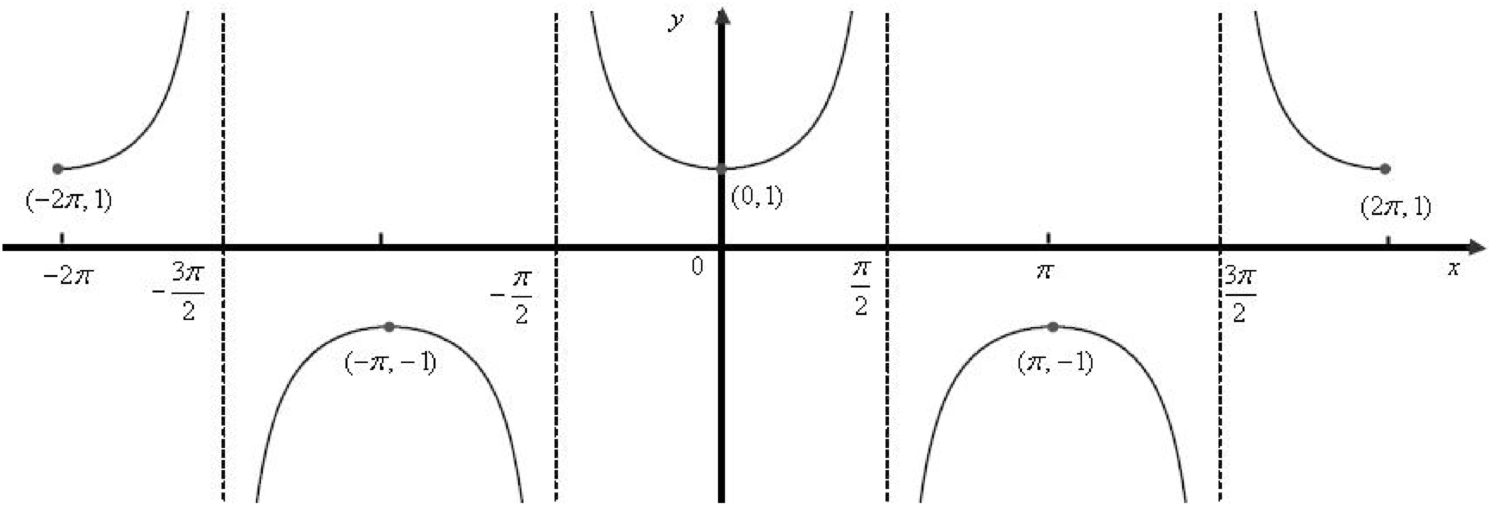
x	2π	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0
$f'(x)$	קצה	$-$		$-$	0	$+$		$+$	קצה
מסקנה	**Min**	↘		↘	**max**	↗		↗	**min**

תשובה: $(0,1)$ **מינימום ,** $(\pi,-1)$ **מקסימום ,** $(2\pi,1)$ **מינימום**

(3) הסקיצה בתחום $0 \le x \le 2$®



ג. עקב זוגיות הפונקציה, הרי שקיימת סימטריה לציר ה- y **ובהתאם הסקיצה המבוקשת.**

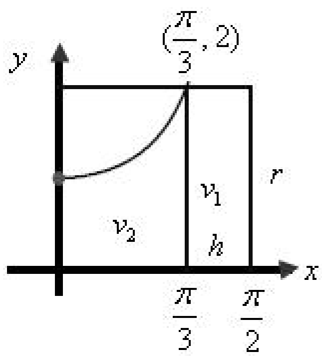


ד. נחשב את הנפח המבוקש:

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad \rightarrow \cos x=0.5 \quad \rightarrow \frac{1}{\cos x}=2$ ועבור $k=0$ נקבל את שיעורי נקודת החיתוך בתחום $(\frac{\pi}{3},2)$.

נחלק את גוף הסיבוב לשני חלקים.

v_1 הוא מלבן, כאשר גוף הסיבוב הנוצר הוא גליל , שרדיוסו 2 וגובהו $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ ובהתאם נחשב את נפחו.



$$v_1=\pi r^2h=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$v_2=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{\cos x})^2\,dx$$

$$v_2=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$v_2=\pi\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$v_2=\pi\tan\frac{\pi}{3}-\pi\tan 0$$

$$\boxed{v_2=\pi\sqrt{3}}$$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $\frac{2}{3}\pi^2+\pi\sqrt{3}=12.02$ יח"ק.

ה. נמצא את נקודות הקיצון בתחום $-\infty<x<\infty$

המחזוריות של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ זהה למחזוריות של הפונקציה $y=\cos x$, כלומר מחזוריות של $2\pi k$.

(1) $(2\pi k,1)$ מינימום.

(2) $(\pi+2\pi k,-1)$ מקסימום.

ניתן להסביר גם באמצעות סימני הנגזרת השנייה:

$$\boxed{f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}} \rightarrow f''(x)=\frac{\cos^3 x+2\cos x\sin^2 x}{\cos^4 x} \rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{\cos x(\cos^2 x+2\sin^2 x)}{\cos^4 x}}$$

הנגזרת הראשונה מתאפסת עבור $x=\pi k$, כאשר $\sin x=0$ ובהתאם $\cos x=\pm 1$.

מכנה הנגזרת השנייה חיובי וערך הביטוי שבתוך הסוגריים חיובי.

לכן סימן הנגזרת השנייה נקבע בהתאם לסימן של $\cos x$

(1) עבור $x=2\pi k \quad \cos x=1>0$ ולכן סימן הנגזרת השנייה חיובי, כלומר $\cup$, ואלו נקודות מינימום.

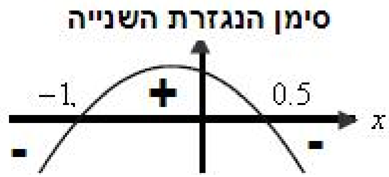
תשובה: $(2\pi k,1)$ מינימום.

(2) עבור $x=\pi+2\pi k \quad \cos x=-1<0$ ולכן סימן הנגזרת השנייה שלילי, כלומר $\cap$, ואלו נקודות מקסימום.

תשובה: $(\pi+2\pi k,-1)$ מקסימום.

א. נמצא את תחומי החיובית/ שליליות של $f''(x)=\frac{-6x^2-3x+3}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$ **,**

שהם גם תחומי הקעירות/ קמירות של $f(x)$ **וגם תחומי העלייה/ ירידה של** $f'(x)$ **.**



$-6x^2-3x+3=0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{-12}\quad\rightarrow x=-1,\ x=0.5$

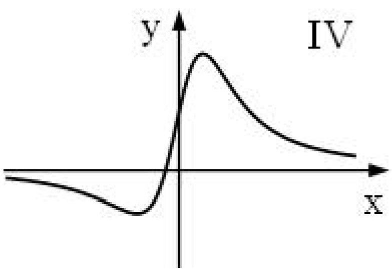
מכנה הנגזרת השנייה חיובי, ולכן סימן הנגזרת השנייה נקבע בהתאם למונה.

הביטוי $-6x^2-3x+3$ **הוא של פרבולה הפוכה, כמתואר משמאל.**

$f''(x)>0$ **עבור** $-1<x<0.5$ **ובתחום זה** $f'(x)$ **עולה.**

$f''(x)<0$ **עבור** $x>0.5$ **או** $x<-1$ **ובתחומים אלו** $f'(x)$ **יורדת.**

תשובה: גרף IV **הוא הגרף המתאים.**



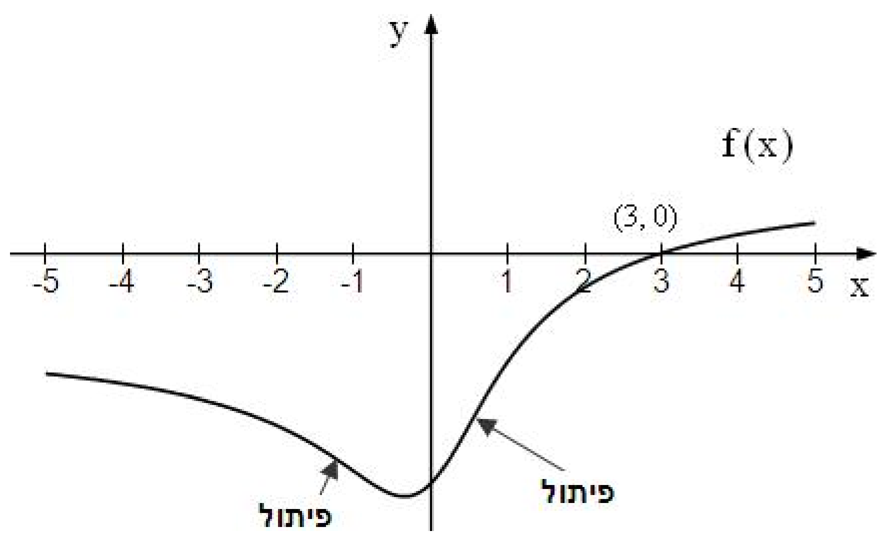
ב. (1) התשובה,על פי ההסבר בסעיף הקודם, בהתאם לתחומי חיוביות שליליות של $f''(x)$

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ $-1<x<0.5$ **, קעירות כלפי מטה** $\cap$ $x>0.5$ **או** $x<-1$ **.**

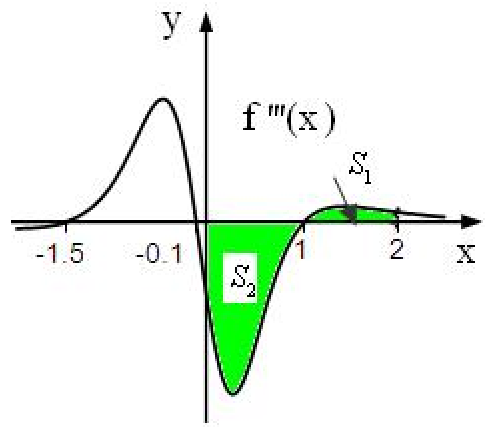
(2) ניתן לראות על פי גרף IV **כי בין** -1 **ל-** 0 $f'(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות ולכן נקודת מינימום.**

תשובה: בין -1 **ל-** 0 **נמצאת נקודת הקיצון (מינימום) של** $f(x)$ **.**

(3) נתון כי $(3,0)$ **נקודת חיתוך יחידה, ובהתאם על פי תתי סעיפים (1) ו- (2) סקיצה של** $f(x)$



ג. נחשב כל שטח בנפרד



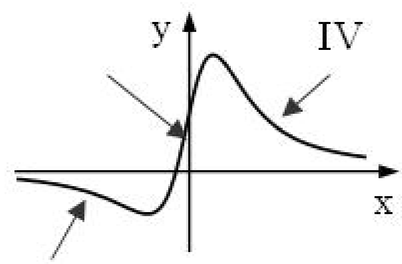
$$S_1=\int_1^2 (f'''(x)-0)\,dx = f''(x)\Big]_1^2 = f''(2)-f''(1)=\frac{-6\cdot 2^2-3\cdot 2+3}{\sqrt{(1+2^2)^5}}-\frac{-6\cdot 1^2-3\cdot 1+3}{\sqrt{(1+1^2)^5}}=-0.483-(-1.061)=0.578$$

$$S_2=\int_0^1 (0-f'''(x))\,dx=-f''(x)\Big]_0^1=-f''(1)+f''(0)=1.061+3=4.061$$

$$S=S_1+S_2=0.578+4.061=4.639$$

תשובה: גודל השטח הוא 4.639 יח"ר.

ד. לפנינו הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$



בחיצים מסומנים מקומות משוערים של שלוש נקודות הפיתול של פונקציה זו, שבהכרח קיימות:

שתיים בשל האסימפטוטה האופקית $y=0$ שקיימת עבור $x\to\pm\infty$

ואחת במעבר בין נקודת המינימום לנקודת המקסימום.

לכן הנגזרת השנייה של פונקציה זו מתאפסת שלוש פעמים, כי בנקודות הפיתול נגזרת שנייה מתאפסת,

אולם $f'''(x)=(f'(x))''$ ולכן גרף הנגזרת השלישית חותך שלוש פעמים את ציר ה- x .

הפונקציה שיש להביא למקסימום היא נפח החרוט.

נסמן את רדיוס הבסיס החרוט ב- r והגובה ב- h,

ועל ידי משפט פיתגורס נקבל $h=\sqrt{l^2-r^2}$.

נמצא את נפח החרוט, ואת הרדיוס של החרוט בעל הנפח המקסימלי.

$$v=\frac{®r^2h}{3}$$

$$\boxed{v=\frac{1}{3}®r^2\sqrt{l^2-r^2}}$$

$$v'=\frac{1}{3}®\cdot(2r\sqrt{l^2-r^2}-\frac{\cancel{2}r\cdot r^2}{\cancel{2}\sqrt{l^2-r^2}})$$

$$v'=\frac{1}{3}®\cdot(\frac{2rl^2-2r^3-r^3}{\sqrt{l^2-r^2}})$$

$$\boxed{v'=\frac{1}{3}®\cdot\frac{2rl^2-3r^3}{\sqrt{l^2-r^2}})}$$

$$0=2rl^2-3r^3 \quad /:r \quad (r>0)$$

$$3r^2=2l^2$$

$$\boxed{r=l\sqrt{\frac{2}{3}}=0.816l} \quad \leftarrow r,l>0$$

$$v'(0.8l)=®\cdot\frac{2\cdot(0.8l)^3-3\cdot(0.8l)^3}{+}=\frac{0.06®l^3}{+}>0$$

$$v'(0.9l)=®\cdot\frac{2\cdot(0.9l)^3-3\cdot(0.9l)^3}{+}=\frac{-0.4®l^3}{+}<0$$

$$\boxed{r=l\sqrt{\frac{2}{3}},\quad Max}$$

מכאן ש- $r=l\sqrt{\frac{2}{3}}$ הוא רדיוס החרוט בעל הנפח המקסימלי,

ועל פי הנתון הרדיוס הוא $r=\sqrt{\frac{2}{3}}$, ולכן $\boxed{l=1}$

תשובה: האורך של l הוא 1 יחידות.