נסמן ב- x **את מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה (קמ"ש, קבועה) .**

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
מעיר A **עד מקום התקלה**	$\frac{3}{4}$	x	$\frac{3}{4}x$
ממקום תקלה חזרה למוסך	$\frac{1}{5}$	50	10
המתנה במוסך	$\frac{33}{60}=\frac{11}{20}$	-	-
מהמוסך לעיר B	$\frac{520-3x}{4(x-10)}$	$x-10$	$120-(\frac{3}{4}x-10)=130-\frac{3}{4}x=\frac{520-3x}{4}$

זמן הנסיעה המתוכנן, במהירות x **של מרחק** 120 **ק"מ, הוא** $\frac{120}{x}$

הנהג הגיע ל- B **באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת,**

כלומר המשוואה המתאימה: $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{11}{20}+\frac{520-3x}{4(x-10)}=\frac{120}{x}+1$

נפתור את המשוואה:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{11}{20}+\frac{520-3x}{4(x-10)}=\frac{120}{x}+1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{520-3x}{4(x-10)}=\frac{120}{x}\quad /\cdot 4x(x-10)$$

$$2x(x-10)+x(520-3x)=480(x-10)$$

$$2x^2-20x+520x-3x^2=480x-4800$$

$$-x^2+20x+4800=x$$

$$x_{1,2}=\frac{-20\pm 140}{-2}$$

$$\boxed{x=80}\quad \leftarrow x>0$$

תשובה: מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה 80 **קמ"ש.**

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $\frac{(6\cdot1-2)\cdot4^{2\cdot1+1}+8}{3}=\frac{264}{3}=88$ **אגף שמאל:** $2\cdot4+5\cdot4^2=88$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $2\cdot4+5\cdot4^2+8\cdot4^3+11\cdot4^4+...+(6k-1)\cdot4^{2k}=\frac{(6k-2)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$\underbrace{2\cdot4+5\cdot4^2+8\cdot4^3+11\cdot4^4+...+(6k-1)\cdot4^{2k}}_{\downarrow}+(6k+2)\cdot4^{2k+1}+(6k+5)\cdot4^{2k+2}=\frac{(6k+4)\cdot4^{2k+3}+8}{3}$$

$$\frac{(6k-2)\cdot4^{2k+1}+8}{3}+(6k+2)\cdot4^{2k+1}+(6k+5)\cdot4^{2k+2}=\frac{(6k+4)\cdot4^{2k+3}+8}{3}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow\frac{(6k-2)\cdot4^{2k+1}+8+3(6k+2)\cdot4^{2k+1}+3(6k+5)\cdot4^{2k+2}}{3}=\frac{(6k+4)\cdot4^{2k+3}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(6k-2)\cdot4^{2k+1}+3(6k+2)\cdot4^{2k+1}+12(6k+5)\cdot4^{2k+1}+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^{2k+1}(6k-2+3(6k+2)+12(6k+5))+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^{2k+1}(6k-2+18k+6+72k+60)+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^{2k+1}(96k+64)+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4^{2k+1}\cdot16(6k+4)+8}{3}=\frac{16(6k+4)\cdot4^{2k+1}+8}{3}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

ב. יש למצוא את ערך הביטוי $2\cdot4+5\cdot16+8\cdot64...+26\cdot262{,}144$

נשים לב כי עבור $n=4$ **מתקבל מהטענה שהוכחה בסעיף א –**

$$2\cdot4+5\cdot4^2+8\cdot4^3+11\cdot4^4+...+(6\cdot4-1)\cdot4^{2\cdot4}=\frac{(6\cdot4-2)\cdot4^{2\cdot4+1}+8}{3}$$

$$2\cdot4+5\cdot4^2+8\cdot4^3+11\cdot4^4+...+23\cdot4^8=1{,}922{,}392$$

ולכן: $$2\cdot4+5\cdot4^2+8\cdot4^3+11\cdot4^4+...+23\cdot4^8+26\cdot262{,}144=1{,}922{,}392+26\cdot262{,}144$$

כלומר: $$2\cdot4+5\cdot4^2+8\cdot4^3+11\cdot4^4+...+23\cdot4^8+26\cdot262{,}144=8{,}738{,}136$$

תשובה: $8{,}738{,}136$

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1$ **,** $a>0$

כיוון ש- $a>0$ **הרי שהמכנה** x^2+3a **אינו מתאפס (חיובי לכל** x **) והפונקציה מוגדרת לכל** x

תשובה: כל x

(2) נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+3a)-2x(x^2-a)}{(x^2+3a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+3a-x^2+a)}{(x^2+3a)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{8ax}{(x^2+3a)^2}}$$

הביטוי $8ax$ **מתאפס עבור** $x=0$ **, וכיוון ש-** $a>0$ **חיובי עבור** $x>0$ **ושלילי עבור** $x<0$

תשובה:עלייה - $x>0$ **, ירידה** $x<0$

(3) בנקודת הפיתול הנגזרת השנייה מתאפסת,

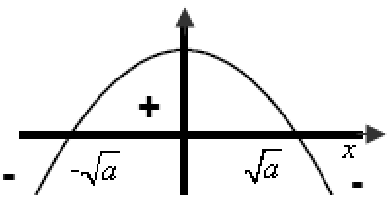
כאשר אנו עוברים מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה, או להפך.

$$f''(x)=8a\cdot\frac{(x^2+3a)^2-2x(x^2+3a)\cdot 2x}{(x^2+3a)^4}$$

$$f''(x)=8a\cdot(x^2+3a)\cdot\frac{(x^2+3a-4x^2)}{(x^2+3a)^4}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{8a\cdot(x^2+3a)(3a-3x^2)}{(x^2+3a)^4}}$$

סימני $f''(x)$



$$0=3a-3x^2 \quad /:3$$

$$x=\pm\sqrt{a} \quad \leftarrow a>0$$

סימני הנגזרת השנייה, בהתאם לציור משמאל

כאשר $\frac{8a\cdot(x^2+3a)}{(x^2+3a)^4}$ **ביטוי חיובי לכל** x **, ו**

עבור $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$ **הפונקציה משנה תחומי קעירות ובהתאם אלו שיעורי ה-** x **של נקודות הפיתול.**

תשובה: $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$

(4) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1}$$

$$0=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1 \quad /\cdot(x^2+3a)$$

$$0=x^2-a-x^2-3a$$

$$a=0$$

אין חיתוך עם ציר ה- x **כי** $a>0$**.**

נקודת חיתוך עם ציר ה- y $\quad f(0)=\frac{0^2-a}{0^2+3a}-1=-1\frac{1}{3}$

תשובה: $(0,-1\frac{1}{3})$

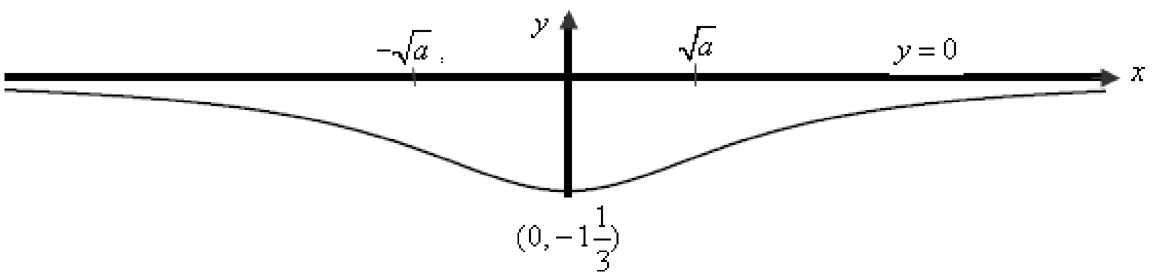
(5) נמצא אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{3a}{x^2}}-1=1-1=0$ **, לכן** $y=0$ **אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** y

הפונקציה מוגדרת לכל x **ואין אסימפטוטה מאונכת לציר ה-** x**.**

תשובה: $y=0$

ב. סרטוט גרף הפונקציה עבור $a>0$



ג. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1$ **,** $a<0$

במקרה זה הביטוי x^2+3a **יכול להתאפס:** $x^2+3a\neq 0 \quad \to x^2\neq -3a \quad \to x\neq \pm\sqrt{-3a}$

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $x\neq\pm\sqrt{-3a}$

(2) $f''(x)=\frac{8a\cdot(x^2+3a)(3a-3x^2)}{(x^2+3a)^4}$ **,** $a<0$

כאשר (x^2+3a) **לא מתאפס בתחום ההגדרה, ו-** $3a-3x^2$ **שלילי לכל** x **עבור** $a<0$**.**

תשובה: אין נקודות פיתול

נכתב ע"י עפר ילין

סימני $f''(x)$

א. נתונות הפונקציות $f(x)=\sqrt{-x-4}$, $g(x)=-\sqrt{x-4}$

תחום ההגדרה של $f(x)=\sqrt{-x-4}$ **:** $-x-4\geq 0 \quad \to -x\geq 4 \quad \to \boxed{x\leq -4}$

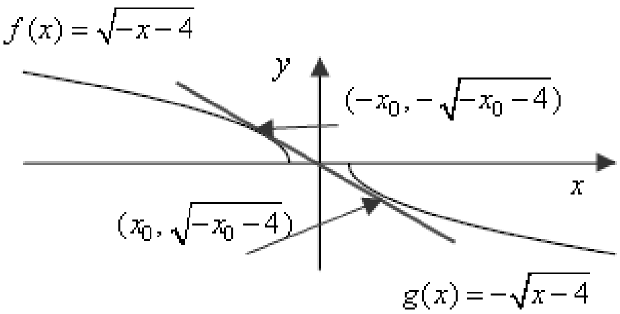
תחום ההגדרה של $g(x)=-\sqrt{x-4}$ **:** $x-4\geq 0 \quad \to \boxed{x\geq 4}$

ב. (1) $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x-4}}$

לכן שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=x_0$ **הוא** $m=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$

$g'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x-4}}$ **כאשר יש למצוא את שיעור ה-** x **עבורו** $m=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$ **.**

$$\frac{-1}{2\sqrt{x-4}}=\frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$$
$$\sqrt{-x_0-4}=\sqrt{x-4}$$
$$-x_0-4=x-4$$
$$x=-x_0$$



$$g(-x_0)=-\sqrt{-x_0-4} \quad \to \boxed{(-x_0,-\sqrt{-x_0-4})}$$

תשובה: שיעורי נקודת ההשקה של המשיק המשותף עם $g(x)=-\sqrt{x-4}$ **הם:** $(-x_0,-\sqrt{-x_0-4})$

(2) שיעורי נקודת ההשקה של המשיק המשותף עם $f(x)=\sqrt{-x-4}$ **הם:** $(x_0,\sqrt{-x_0-4})$

נשתמש בנוסחת שיפוע בין שתי נקודות:

$$\frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}=\frac{-\sqrt{-x_0-4}-\sqrt{-x_0-4}}{-x_0-x_0}$$
$$\frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}=\frac{\cancel{-2}\sqrt{-x_0-4}}{\cancel{-2}x_0}$$
$$-x_0=2(-x_0-4)$$
$$-x_0=-2x_0+8$$
$$x_0=8 \quad \to g(-8)=-\sqrt{-(-8)-4}=-2 \quad \to \boxed{(8,-2)}$$

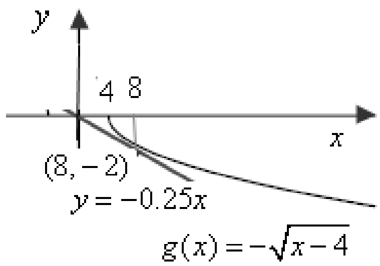
תשובה: $(8,-2)$

ג. הנוסחה לנפח גוף סיבוב היא $V = p\int_a^b f^2(x)\,dx$

נמצא את משוואת המשיק העובר בנקודה $(8,-2)$ **ושיפועו** $m = \dfrac{-1}{2\sqrt{8-4}} = -0.25$

$$y+2 = -0.25(x-8)$$
$$y = -0.25x$$

והמשיק עובר בראשית הצירים.



נחשב את V_1 **- נפח הגוף שנוצר על ידי סיבוב השטח בין המשיק עם ציר ה-** x **(מנקודת ההשקה לראשית***

ונפחית ממנו את V_2 **- נפח הגוף שנוצר על ידי סיבוב השטח בין** $g(x) = -\sqrt{x-4}$ **עם ציר ה-** x **,**

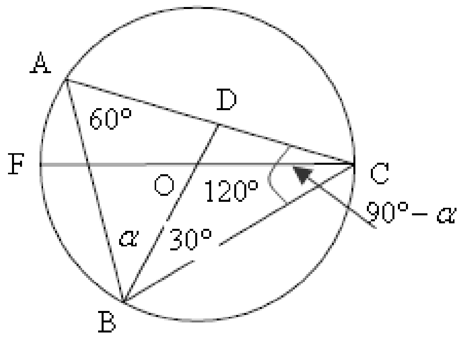
מנקודת ההשקה לנקודה $(4,0)$

$$V_1 = p\int_0^8 \left[(-0.25x)^2\right]dx =$$
$$V_1 = p\int_0^8 \left[0.0625x^2\right]dx =$$
$$V_1 = p\left(\frac{0.0625x^3}{3}\right]_0^8$$
$$V_1 = p\left(\left(\frac{0.0625\cdot 8^3}{3}\right) - \left(\frac{0.0625\cdot 0^3}{3}\right)\right)$$
$$V_1 = 10\frac{2}{3}p$$

$$V_2 = p\int_4^8 \left[((-\sqrt{x-4}))^2\right]dx =$$
$$V_2 = p\int_4^8 \left[x-4\right]dx =$$
$$V_2 = p\left(\frac{x^2}{2} - 4x\right]_4^8$$
$$V_2 = p\left(\left(\frac{8^2}{2} - 4\cdot 8\right) - \left(\frac{4^2}{2} - 4\cdot 4\right)\right)$$
$$V_2 = 8p$$

ובהתאם: $V = V_1 - V_2 = 10\frac{2}{3}p - 8p = 2\frac{2}{3}p$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $2\frac{2}{3}p$



א. הקשת $\overset{\frown}{BC}$ **ארוכה פי** 2 **מהקשת** $\overset{\frown}{FB}$ **(נתון)**

CF **הוא קוטר במעגל (נתון) ולכן** $\overset{\frown}{FB}=180°$ **,**

כאשר $\overset{\frown}{BC}=\frac{2}{3}\cdot180°=120°$ **ולכן** $\angle BAC=60°$

(זווית היקפית שווה לחצי הקשת עליה היא נשענת)

תשובה: $\angle BAC=60°$

ב. נמצא את היחס $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}}$

לשני המשולשים גובה משותף לצלעות AD **ו-** AC **(** h **אנך מ-** B **לצלע** AC **, לא מצויר בסרטוט).**

לכן, $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{0.5AD\cdot h}{0.5AC\cdot h}=\frac{AD}{AC}$

$\angle BOC=120°$ **(זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת)**

$\angle OBC=\angle OCB=30°$ **(מול רדיוסים שווים מונחות זוויות שוות** ΔOBC **)**

$\angle DCB=90°-\alpha$ **(סכום זוויות** ΔABC $180°$ **)**

$\underline{\Delta ABD}$

$$\frac{AB}{\sin(180°-(60°+\alpha))}=\frac{AD}{\sin\alpha}\quad\to AB=\frac{AD\sin(60°+\alpha)}{\sin\alpha}$$

$\underline{\Delta ABC}$

$$\frac{AC}{\sin(30°+\alpha)}=\frac{AB}{\sin(90°-\alpha)}$$

$$AC=\frac{AD\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2AD\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}{\sin2\alpha}$$

ובהתאם יחס השטחים:

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{\frac{2AD\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}{\sin2\alpha}}=\frac{\sin2\alpha}{2\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}$$

תשובה: $\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{\sin2\alpha}{2\sin(60°+\alpha)\sin(30°+\alpha)}$

ג. נתון גם: $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$ **ועל פי סעיף ב:** $\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\sin(60°+\alpha)}$

$$\frac{2}{3}=\frac{\sin a}{\sin(60°+a)}$$

$$2(\sin 60° \cos a+\cos 60° \sin a)=3\sin a \qquad /:\sin a \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\tan a}+1=3 \quad \rightarrow \tan a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{a=40.89°} \quad \leftarrow 0<a<90°$$

תשובה: $a=40.89°$