**נסמן ב- $v$ את המהירות של דן מתל אביב לכיוון הרצליה (קמ"ש, קבועה)**

**ובהתאם $v+2$ היא מהירותה של אילנית מתל אביב עד הרצליה.**

**נסמן ב- $t$ את זמן הרכיבה של דן מתל אביב לכיוון הרצליה (שעות)**

**ובהתאם $t-0.5$ הוא זמן הרכיבה של אילנית עד שנפגשה עם דן, בדרך להרצליה.**

**נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:**

| | | זמן - $t$ שעות | מהירות - $v$ קמ"ש | דרך-מרחק - $s$ ק"מ |
|---|---|---|---|---|
| עד המפגש | דן | $t$ | $v$ | $vt$ |
| | אילנית | $t-0.5$ | $v+2$ | $(v+2)(t-0.5)$ |
| מהמפגש עד הרצליה | אילנית | $0.5$ | $v+2$ | $0.5(v+2)$ |

**עד המפגש עברו שני הרוכבים את אותו מרחק:** $vt=(v+2)(t-0.5)$ **.**

**מסלול הרכיבה שעברה אילנית, מתל אביב עד הרצליה, הוא** $9<t(v+2)<25$

**נבודד את $t$ מהמשוואה הראשונה:**

$$vt=(v+2)(t-0.5)$$
$$vt=vt-0.5v+2t-1$$
$$2t=0.5v+1$$
$$\boxed{t=0.25v+0.5}$$

**נציב באי-שוויון** $9<(0.25v+0.5)(v+2)<25 \leftarrow 9<0.25v^2+v+1<25$

$$0.25v^2+v+1<25$$
$$0.25v^2+v-24<0$$
$$v_{1,2}=\frac{-1\pm5}{0.5} \quad \to v=8,-12$$

**נקבל פרבולה בעלת מינימום,**

**ובמגבלות תחום הבעיה** $v>0$

**פתרונה** $0<v<8$

$$0.25v^2+v+1>9$$
$$0.25v^2+v-8>0$$
$$v_{1,2}=\frac{-1\pm3}{0.5} \quad \to v=4,-8$$

**נקבל פרבולה בעלת מינימום,**

**ובמגבלות תחום הבעיה** $v>0$

**פתרונה** $v>4$

**חיתוך הפתרונות הוא** $4<v<8$ **.**

**תשובה: המהירות $v$ נמצאת בתחום המספרים $(4,8)$, או 8 קמ"ש $< v <$ 4 קמ"ש.**

**א. 1. נבדוק עבור** $n=3$ **:**

**אגף ימין:** $9\cdot1\cdot3\cdot5=135$ $<$ **אגף שמאל:** $2\cdot3\cdot4\ 4\cdot5\cdot6=120$

**לכן, הטענה נכונה עבור** $n=3$

**2. נניח את נכונות הטענה עבור** $n=k>2$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

**כלומר:** $(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot..\cdot2k>3^{k-1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)$

**3. נוכיח שהטענה נכונה עבור** $(n>3)\quad n=k+1$ **, לכן צ"ל**

$$(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)\cdot..\cdot2k\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)<3^{k+1-1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)$$

$$3^{k-1}\cdot\boxed{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}\cdot(2k+2)<3^{k}\cdot\boxed{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}(k+1)$$

**החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי הגדול ממנו,**

**לכן, די אם נוכיח אי-שוויון חלש (כולל סימן השוויון).**

**הביטויים שבמסגרת שלמים וחיוביים, לכל** $k>2$ **, ולכן די אם נוכיח את האי שוויון הבא:**

$$\Leftrightarrow 3^{k-1}\cdot(2k+2)\le3^{k}\cdot(k+1)\quad /:3^{k-1}>0$$
$$\Leftrightarrow 2k+2\le3(k+1)$$
$$\Leftrightarrow 2k+2\le3k+3\quad\rightarrow true$$

**4. בדקנו את נכונות הטענה עבור** $n=3$ **,**

**הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k>2$ **טבעי**

**אז היא נכונה עבור** $(n>3)\quad n=k+1$

**לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** $n>2$ **טבעי.**

**ב. על פי סעיף א מתקיים :**

$$((n+3)+1)\cdot((n+3)+2)\cdot((n+3)+3)\cdot..\cdot(2(n+3)>3^{n+3-1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2(n+3)-1)$$

**כלומר,** $(n+4)\cdot(n+5)\cdot(n+6)\cdot..\cdot(2n+6)>3^{n+2}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n+5)$

**ולכן :** $\frac{(n+4)\cdot(n+5)\cdot(n+6)\cdot..\cdot(2n+6)}{3^{n+2}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n+5)}>1$ **(לאחר חילוק בביטוי אלגברי חיובי לכל** $n$ **)**

**תשובה: הוכח.**

**א. נתונה הפונקציה:** $f(x)=\frac{6}{x^2+3a^2}$ **,** $a>0$ **, פרמטר.**

**(1) הביטוי שבמכנה הוא חיובי, כי הוא סכום של ביטוי אי שלילי,** $x^2$ **, עם ביטוי חיובי,** $3a^2$ **(**$a>0$**)**

**תשובה כל** $x$

**(2) חיתוך עם ציר** $x$ **מתקיים** $y=0$ **ואין פתרון , חיתוך עם ציר** $y$ **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,\frac{2}{a^2})$

**תשובה:** $(0,\frac{2}{a^2})$**.**

**(3) נחפש אסימפטוטות לפונקציה** $f(x)$ **המאונכות לצירים.**

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{6}{x^2+3a^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x^2}}{1+\frac{3a^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{1+0}=0$ **, לכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

**תשובה:** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

**(4) נמצא את נקודות הקיצון ואת סוגן**

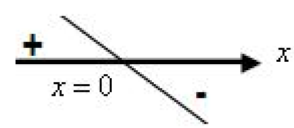
$$f'(x)=-\frac{2(x-b)(x^2-4)-2x(x-b)^2}{(x^2-4)^2}=\frac{2(x-b)(x^2-4-x(x-b))}{(x^2-4)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=-\frac{12x}{(x^2+3a^2)^2}}$$

$$0=-12x$$

$$x=0 \quad \to (0,\frac{2}{a^2})$$

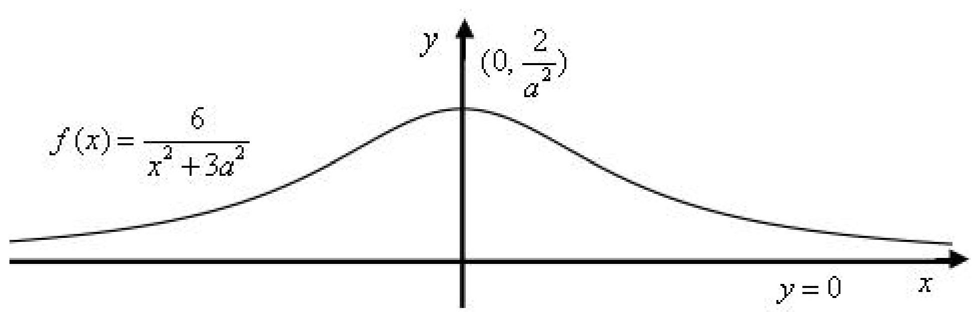
**גרף סימני הנגזרת (מכנה חיובי)**



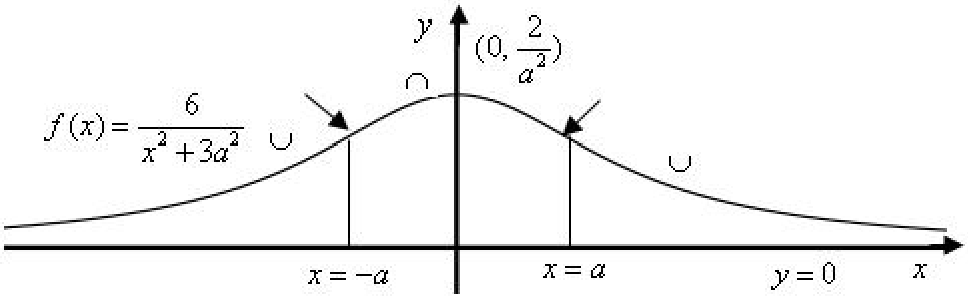

$x=0$ **עוברים מנגזרת חיובית לשלילית, כלומר מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

**תשובה:** $(0,\frac{2}{a^2})$ **מקסימום.**

**ב. הסקיצה המתאימה:**



ג. (1) להלן הסקיצה בה מסומנות נקודות הפיתול (שתי היחידות) ותחומי הקעירות.



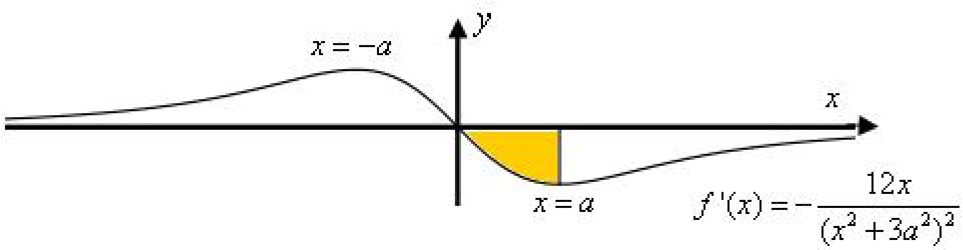

תשובה: $f''(x)$ חיובית בתחומים: $x>a$ או $x<-a$ . $f''(x)$ שלילית בתחום $-a<x<a$ .

(2) כאשר $x=a$ $f''(x)$ עוברת משליליות לחיוביות ולכן $f'(x)$ מירידה לעלייה ולכן מינימום.

כאשר $x=-a$ $f''(x)$ עוברת מחיוביות לשליליות ולכן $f'(x)$ מעלייה לירידה ולכן מקסימום.

תשובה: $x=a$ מינימום , $x=-a$ מקסימום.

ד. ע"פ הסעיפים הקודמים ניתן לצייר את גרף הנגזרת.




$$S=\int_0^a (0-f'(x))dx = -f(x)\Big]_0^a = -f(a)+f(0) = \frac{-6}{4a^2}+\frac{2}{a^2} = \frac{1}{2a^2}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{1}{2a^2}$ יח"ר.

**א. נתונה הפונקציה:** $f(x)=-\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\sin x$ **בקטע** $0\le x\le 3\pi$ **.**

**(1) הפונקציה** $\sin x$ **אי שלילית, בקטע הנתון, בתחומים** $0\le x\le \pi$ **או** $2\pi\le x\le 3\pi$ **.**

**תשובה: תחום ההגדרה הוא** $0\le x\le \pi$ **או** $2\pi\le x\le 3\pi$ **.**

**(2) נמצא תחילה את ערכי הפונקציה בקצות התחום הסגור, ולאחר מכן נקודות קיצון פנימיות:**

$$f(0)=-\sqrt{\sin 0}+0.5\sin 0=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$f(\pi)=-\sqrt{\sin \pi}+0.5\sin \pi=0 \quad \rightarrow \boxed{(\pi,0)}$$

$$f(2\pi)=-\sqrt{\sin 2\pi}+0.5\sin 2\pi=0 \quad \rightarrow \boxed{(2\pi,0)}$$

$$f(3\pi)=-\sqrt{\sin 3\pi}+0.5\sin 3\pi=0 \quad \rightarrow \boxed{(3\pi,0)}$$

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{2\sqrt{\sin x}}+\frac{1}{2}\cos x$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\cos x(-1+\sqrt{\sin x})}{2\sqrt{\sin x}}}$$

$$\cos x=0 \qquad \sin x=1$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow f(\frac{\pi}{2})=-\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}+0.5\sin\frac{\pi}{2}=-0.5 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},-0.5)}$$

$$x=\frac{5\pi}{2} \quad \rightarrow f(\frac{5\pi}{2})=-\sqrt{\sin\frac{5\pi}{2}}+0.5\sin\frac{5\pi}{2}=-0.5 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{5\pi}{2},-0.5)}$$

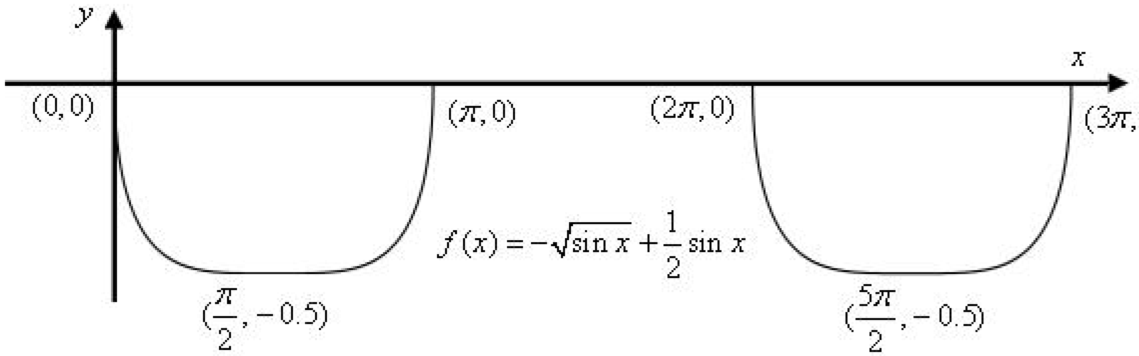
**הפתרון** $x=\frac{3\pi}{2}$ **שמתקבל עבור** $\cos x=0$ **אינו בתחום ההגדרה.**

**נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי הפונקציה,**

| $x$ | $3\pi$ | | $\frac{5\pi}{2}$ | | $2\pi$ | | $\pi$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | | $-0.5$ | | $0$ | | $0$ | | $-0.5$ | | $0$ |
| $f'(x)$ | | | | | | | | | | | |
| **מסקנה** | **Max** | ↗ | **Min** | ↘ | **Max** | | **Max** | ↗ | **Min** | ↘ | **Max** |

**תשובה:** $(\frac{\pi}{2},-0.5)$ **,** $(\frac{5\pi}{2},-0.5)$ **מינימום ,** $(0,0)$ **,** $(\pi,0)$**,** $(2\pi,0)$ **,** $(3\pi,0)$ **מקסימום.**

**ב. (1) הסקיצה המתאימה**




**(2) המשיק לפונקציה בשתי נקודות בדיוק עובר בנקודות המינימום, ולכן משוואתו** $y=-0.5$ **.**

**תשובה:** $y=-0.5$

**ג. האי שוויון** $\frac{1}{2}\sin x>\sqrt{\sin x}$ **שקול לאי שוויון** $-\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\sin x>0$ **, כלומר ל-** $f(x)>0$ **.**

**על פי הסקיצה ניתן לראות שאין פתרון בקטע הנתון.**

**תשובה: אין ערכי** $x$ **עבורם מתקיים האי שוויון בקטע הנתון.**

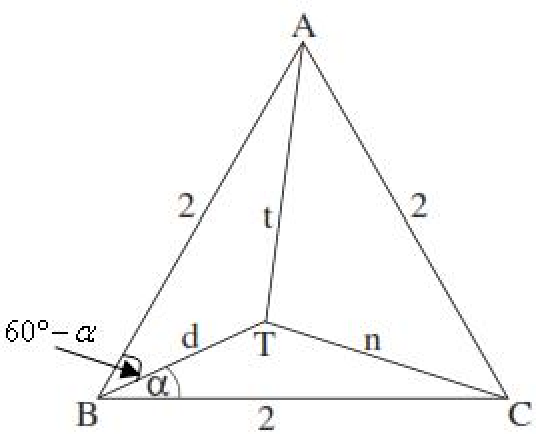
**א. זוויות משולש** ABC **שווה ל-** $60°$ **.**

**הזוויות שניתן לבטא באמצעות** $\sim$ $\sphericalangle TBA =$ **ו- .**

**לכן נשתמש פעמיים במשפט הקוסינוסים במשולשים המתאימים.**

$\underline{\Delta TBC}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(TC)^2 = (BT)^2 + (BC)^2 - 2BT \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle TBA$$
$$n^2 = d^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot d \cdot \cos\sim$$
$$\cos\sim = \frac{d^2 - n^2 + 4}{4d}$$




$\underline{\Delta ABT}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(AT)^2 = (BA)^2 + (BT)^2 - 2BA \cdot BT \cdot \cos\sphericalangle ABT$$
$$t^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d \cdot \cos(60° - \sim)$$
$$(60° - \sim) = \frac{d^2 - t^2 + 4}{4d}$$

**נחסר את שתי המשוואות, על מנת לבטל את** $d^2$ **ונשתמש בזהות, שבנוסחאון, ל-** $\cos\sim - \cos$

$$\cos\sim - (60° - \sim) = \frac{d^2 - n^2 + 4 - (d^2 - t^2 + 4)}{4d}$$
$$-2\sin(30°)\sin(\sim - 30°) = \frac{t^2 - n^2}{4d}$$
$$\boxed{\sin(\sim - 30°) = \frac{n^2 - t^2}{4d}}$$

**תשובה: הוכַח.**

**ב. כיוון שלא ניתן למצוא בקלות זוויות במשולש** ATC **,**

**נחשב את שטחו באמצעות חיסור שטחי משולשים.**

$$S_{\Delta ATC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ATB} - S_{\Delta BTC}$$
$$S_{\Delta ATC} = 0.5 \cdot 2^2 \sin(60°) - 0.5 \cdot 2 \cdot d \cdot \sin(60° - \sim) - 0.5 \cdot 2 \cdot d \sin\sim$$
$$\boxed{S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d \cdot (\sin(60° - \sim) + \sin\sim)}$$
$$S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d \cdot (2\sin 30° \cos(30° - \sim)$$
$$\boxed{S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d\cos(30° - \sim)}$$

**תשובה:** $S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d \cdot (\sin(60° - \sim) + \sin\sim)$ **או** $S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d\cos(30° - \sim)$ **.**