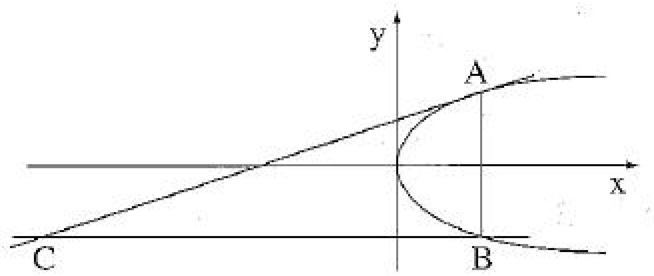
א. (1) נסמן $C(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי .**



$y_B = y_C = t$ **, שכן** BC **מקביל לציר ה-** x **והמשוואה שלו** $y = t$ **.**

B **על הפרבולה** $y^2 = 2px$ **ולכן שיעוריה** $B(\frac{t^2}{2p}, t)$ **.**

$x_A = x_B$ **, שכן** AB **מקביל לציר ה-** y **,**

ועקב הסימטריות של הפרבולה לציר ה- x **, שיעורי הנקודה** $A(\frac{t^2}{2p}, -t)$ **.**

משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$ **:** $yy_0 = p(x + x_0)$

ובהתאם השיפוע $m = \frac{p}{y_0}$ **, לכן:** $m_{AC} = \frac{p}{-t}$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-t-t}{\frac{t^2}{2p} - s}$$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-2t}{\frac{t^2 - 2sp}{2p}}$$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-4tp}{t^2 - 2sp}$$

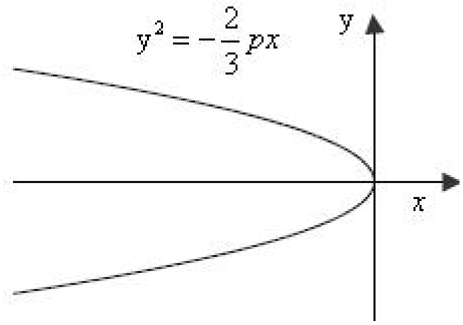
$$t^2 - 2sp = 4t^2$$

$$3t^2 = -2sp$$

$$\boxed{y^2 = -\frac{2}{3}px}$$

תשובה: $y^2 = -\frac{2}{3}px$

(2) הסרטוט המתאים:



ב. נתון כי שיעור ה- y של נקודה C, הנמצאת על המקום הגיאומטרי $y^2 = -\frac{2}{3}px$, הוא $y = -2p$.

על פי בסעיף הקודם שיעור ה- y בנקודת ההשקה הוא נגדי לשיעור ה- y בנקודה C

ולכן: $m_{AC} = \frac{p}{-t} = \frac{p}{-(-2p)} = 0.5$

השיפוע של המשיק חיובי, שכן המשיק עולה,

כאשר הוא שווה ל tan של הזווית בינו לבין הכיוון החיובי שלציר ה- x

$\tan \sim = 0.5$

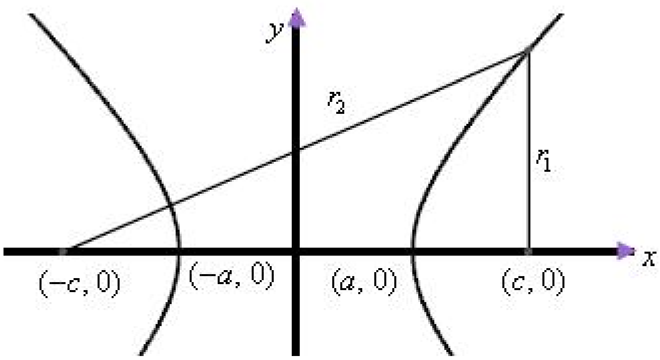
$\sim = 26.565°$

תשובה: הזווית שבין המשיק לפרבולה, CA, ובין ציר ה- x היא בת $26.565°$

נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **הוא המוקד הימני של ההיפרבולה** $(c,0)$**.**

א. נוכיח כי $\frac{a^2}{c}<a$ **.**

ההיפרבולה היא המקום הגיאומטרי של כל נקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות שווה לקטע קבוע.
הערך המוחלט של הפרש המרחקים (הפרש הרדיוסים) הוא $2a$ **והנקודות** $(c,0)$, $(-c,0)$ **הן המוקדים.**

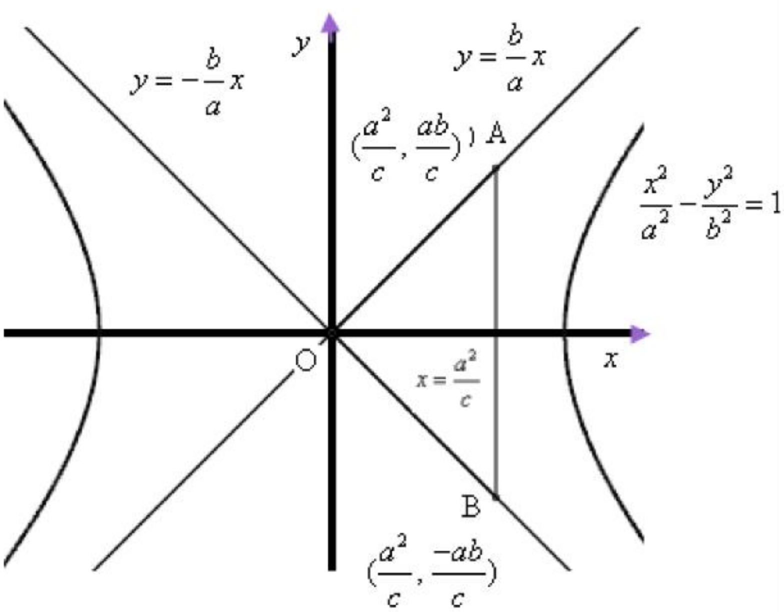


כאשר נוצר משולש שבו הפרש שתי צלעות קטן משלישית
ולכן $2a<2c$
ומכאן ש $a<c$ **הוא תנאי לקיום ההיפרבולה, כאשר** $a,c>0$ **.**

לכן: $\frac{a}{c}<1$ **ומכאן, לאחר הכפלה ב-** $a>0$ **נקבל ש-** $\frac{a^2}{c}<a$

הוכח.

ב. האסימפטוטות הן: $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$



כיוון שהשיפועים של האסימפטוטות נגדיים, הרי
שהזווית בינם לקרן החיובית של ציר ה- x **שווה,**
כאשר ציר ה- x **הוא חוצה זווית ומאונך לישר**
$x=\frac{a^2}{c}$ **ומכאן שמשולש** ABO **שווה שוקיים.**

נציב $x=\frac{a^2}{c}$ **במשוואות שתי האסימפטוטות:**

$$y=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{c}=\frac{ab}{c}\quad\rightarrow \mathrm{A}(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c})$$

$$y=-\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{c}=\frac{-ab}{c}\quad\rightarrow \mathrm{B}(\frac{a^2}{c},\frac{-ab}{c})$$

$$\mathrm{OA}=\sqrt{(\frac{a^2}{c}-0)^2+(\frac{ab}{c}-0)^2}$$

$$\mathrm{OA}=\sqrt{\frac{a^4+a^2b^2}{c^2}}$$

$$\mathrm{OA}=\sqrt{\frac{a^2(a^2+b^2)}{c^2}}$$

ומכיוון שבהיפרבולה מתקיים $a^2+b^2=c^2$ **,**
הרי שנקבל ש: $\mathrm{OA}=a$
הוכח.

ג. נתון גם כי המשולש ABO **הוא שווה-צלעות.**

לכן $\text{OA} = \text{OB} = \text{OA} = a$

$\sphericalangle \text{AOD} = 30°$ **ולכן במשולש** ADO

$$\cos 30° = \frac{\text{AD}}{a}$$

$$\text{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

כיוון שהמשולש שווה צלעות, הרי שמרכז המעגל החוסם, הוא גם מפגש תיכוניים.

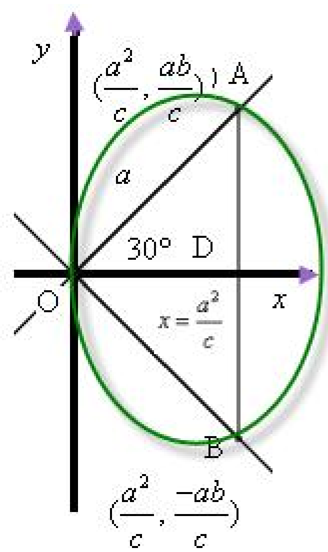
נקודת מפגש התיכוניים מחלקת את התיכון ביחס $2:1$ **מהקדקוד,**

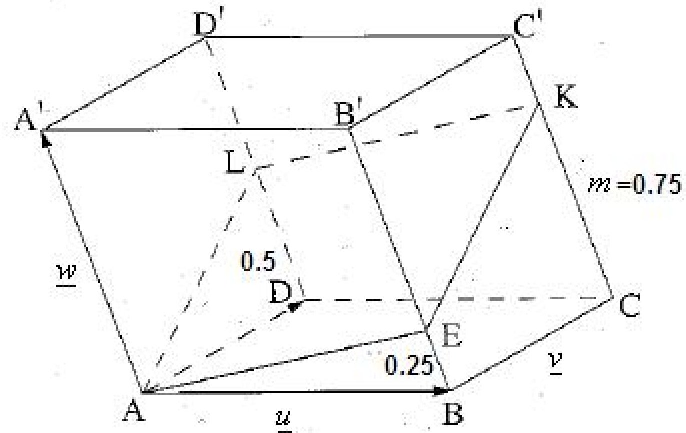
כאשר ציר ה- x **הוא גם תיכון במשולש.**

$$x_{\text{M}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

ולכן שיעורי מרכז המעגל הם $\text{M}(\frac{a}{\sqrt{3}}, 0)$ **ורדיוסו** $\text{R} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

תשובה: משוואת המעגל החוסם את המשולש היא $(x - \frac{a}{\sqrt{3}})^2 + y^2 = \frac{a^2}{3}$





א. נתון כי L **היא אמצע המקצוע** DD' ,

ו- E **נמצאת על המקצוע** BB' **, כך ש-** $\frac{B'E}{BE}=3$.

$\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{CK}=m\,\overrightarrow{CC'}$

ובהתאם: $\overrightarrow{CK}=m\,\underline{w}$, $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\underline{w}$

המקצוע AA' **מאונך למישור** AEL ,

לכן יוצר זווית ישרה עם כל וקטור במישור AEL .

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AL}=0 \quad \to \underline{w}(\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})=0 \quad \to \underline{w}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}^2=0$$

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{EK}=0 \quad \to \underline{w}[\underline{v}+(m-\frac{1}{4})\underline{w}]=0 \quad \to \underline{w}\underline{v}+(m-\frac{1}{4})\underline{w}^2=0$$

$$\frac{1}{2}\underline{w}^2-(m-\frac{1}{4})\underline{w}^2=0 \quad / \div \underline{w}^2 \ \left(\underline{w}^2\neq 0\right)$$

$$\frac{1}{2}-m+\frac{1}{4}=0$$

$$\boxed{m=\frac{3}{4}}$$

תשובה: $m=\frac{3}{4}$

ב. ההצגה הפרמטרית של הישר CC' **היא** $\underline{x}=(4,5,8)+t(1,-1,2)$ **, כאשר הנקודה** $(2,-1,3)$ **נמצאת במישור** AEL .

משוואת המישור AEL **, שהנורמל שלו הוא** $\underline{x}=(1,-1,2)$ **היא** $®: x-y+2z+d=0$

נציב את שיעורי הנקודה $(2,-1,3)$ **ונקבל:** $2-(-1)+2\cdot 3+d=0 \quad \to d=-9$

ולכן משוואת המישור AEL **היא** $®: x-y+2z-9=0$

שיעורי הקדקוד C' **הם** $(x,y,0)$ **, כאשר נקודה טיפוסית על הישר** CC' **היא** $(4+t,5-t,8+2t)$

עבור $z_C=0$ **נקבל** $8+2t=0$ **ומכאן ש-** $t=-4$ **ושיעורי הקדקוד** C' **הם** $(0,9,0)$

נמצא את מרחק הקדקוד C' **מהמישור** $®: x-y+2z-9=0$

$$d=\frac{|-9-9|}{\sqrt{1^1+(-1)^2+2^2}}=\frac{18}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$$

הנקודה K **היא נקודת החיתוך של המקצוע** CC' **עם המישור** AEL **, כאשר מקצוע זה מאונך לו.**

כיוון ש $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$ **, הרי ש-** $\overrightarrow{CK}=3\overrightarrow{C'K}$ **ומכאן שהמרחק הקדקוד** C **מהמישור** AEL **הוא** $3\cdot 3\sqrt{6}=9\sqrt{6}$

תשובה: מרחק הקדקוד C **מהמישור** AEL **הוא** $9\sqrt{6}$.

z_1 , z_2 ו- z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.

z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון, ו- z_3 נמצא ברביע השלישי.

נסמן $z_1 = r_1(\cos\sim + i\sin\sim)$.

כיוון ש- z_1 , z_2 ברביע הראשון ונמצאים על ישר העובר בראשית הצירים, הרי שהארגומנטים שלהם שווים,

אך הרדיוסים שונים, כי נתון שהם מספרים שונים. בהתאם: $z_2 = r_2(\cos\sim + i\sin\sim)$.

z_3 נמצא ברביע השלישי, על אותו ישר העובר בראשית הצירים, לכן $z_3 = r_3(\cos(\sim + 180°) + i\sin(\sim + 180°))$,

כאשר ייתכן כי הרדיוס של z_3 שווה לזה של z_1 או z_2 .

נעבד את ההצגה הטריגונומטרית של $\arg(z_3)$,

תוך שימוש בזהויות $\sin(\sim + 180°) = -\sin\sim, \cos(\sim + 180°) = -\cos\sim$

$$(\cos(\sim + 180°) + i\sin(\sim + 180°)) =$$
$$(-\cos\sim - i\sin\sim) =$$
$$-(\cos\sim + i\sin\sim)$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1(\cos\sim + i\sin\sim) - (r_3(\cos(\sim + 180°) + i\sin(\sim + 180°))}{r_2(\cos\sim + i\sin\sim) - (r_3(\cos(\sim + 180°) + i\sin(\sim + 180°))}$$
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{(\cos\sim + i\sin\sim)(r_1 + r_3)}{(\cos\sim + i\sin\sim)(r_2 + r_3)}$$
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}$$

תשובה: $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}$

4ב

נמצא עבור אילו ערכים של b **מתקיים:** $\int_{-2}^{b} xe^{-x^2}dx > 0$ **.**

ניעזר באינטגרל על-ידי הצבה, כהקדמה לחישוב האינטגרל:

נסמן: $u(x) = -x^2$

לכן: $\frac{du}{dx} = -2x$

ובהתאם: $-0.5du = xdx$

$$\int xe^{-x^2}\ dx =$$
$$= \int -0.5e^{u}\ du =$$
$$= -0.5e^{u} + c$$
$$= -0.5e^{-x^2} + c$$

$$\int_{-2}^{b} xe^{-x^2}dx = -0.5e^{x^2}\Big]_{-2}^{b} =$$
$$\int_{-2}^{b} xe^{-x^2}dx = -0.5e^{-b^2} + 0.5e^{-(-2)^2}$$
$$\int_{-2}^{b} xe^{-x^2}dx = -0.5e^{-b^2} + 0.5e^{-4}$$

$$-0.5e^{-b^2} + 0.5e^{-4} > 0$$
$$0.5e^{-4} > 0.5e^{-b^2} \quad / : 0.5$$
$$e^{-4} > e^{-b^2}$$
$$-4 > -b^2$$
$$b^2 > 4$$

פתרון אי שוויון זה, באמצעות ציור של פרבולה הפוכה, הוא $b > 2$ **או** $b < -2$ **,**

אולם על פי תבנית האינטגרל המסוים, $\int_{-2}^{b}$ **, הרי ש-** $b > -2$ **ומכאן שהתשובה היא** $b > 2$**.**

תשובה: $b > 2$

נתונות שלוש פונקציות, I , II , III :

$I.\quad y=-2x+4 \qquad II.\quad y=\ell nx \qquad III.\quad y=\ell nx+2x-4$

א. הפונקציה $y=-2x+4$ $I.$ **מוגדרת לכל** x**, יורדת לכל** x **וכמובן אין לה אסימפטוטות המקבילות לצירים.**

הפונקציה $y=\ell nx$ $II.$ **מוגדרת עבור** $x>0$ **וגם הפונקציה** $y=\ell nx+2x-4$ $III.$ **מוגדרת עבור** $x>0$ **.**

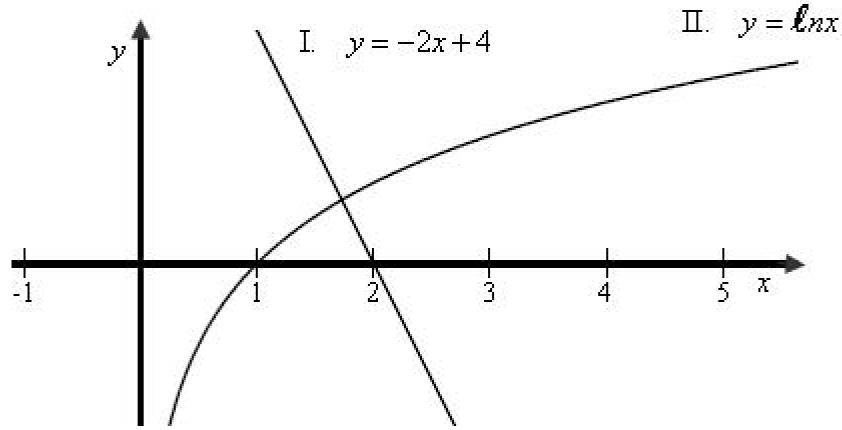
$\lim\limits_{x\to 0^+}\ell nx=-\infty$ **ולכן** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית, כאשר** $\lim\limits_{x\to}\ell nx=\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית.**

ב. (1) נגזרת הפונקציה $y=\ell nx$ $II.$ **היא** $y'=\frac{1}{x}$**, שהיא חיובית בתחום ההגדרה** $x>0$ **ולכן הפונקציה עולה,**

והנגזרת השנייה $y'=-\frac{1}{x^2}$ **שלילית ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה בתחום ההגדרה** $x>0$**.**

הפונקציה חותכת את הצירים בנקודות $(1,0)$, $(0,1)$**.**

הפונקציה $y=-2x+4$ $I.$ **היא פונקציה קווית יורדת החותכת את הצירים בנקודות** $(2,0)$, $(0,4)$



(2) נקודת החיתוך בין הגרפים של הפונקציות I **ו-** II **חייבת להימצא בתחום** $1<x<2$ **,**

כי עבור $x=1$ **ערך הפונקציה** I **גדול מזה של** II **ועבור** $x=2$ **ערך הפונקציה** I **קטן מזה של** II**,**

כאשר פונקציה אחת יורדת והשנייה עולה,

ובהתאם בתחום $1<x<2$ **ימצא שיעור ה-** x **עבורו ערכי הפונקציות שווים.**

ג. (1) נגזרת הפונקציה $y=\ell nx+2x-4$ $III.$ **היא** $y'=\frac{1}{x}+2$**, שהיא חיובית בתחום ההגדרה** $x>0$

ולכן הפונקציה עולה והנגזרת השנייה $y'=-\frac{1}{x^2}$ **שלילית ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה**

בתחום ההגדרה $x>0$**.**

תשובה: ירידה – אף x **, עלייה** $x>0$

(2) נשים לב לכך ש: $y=\ell nx+2x-4=\ell nx-(2x+4)$ .III **,**

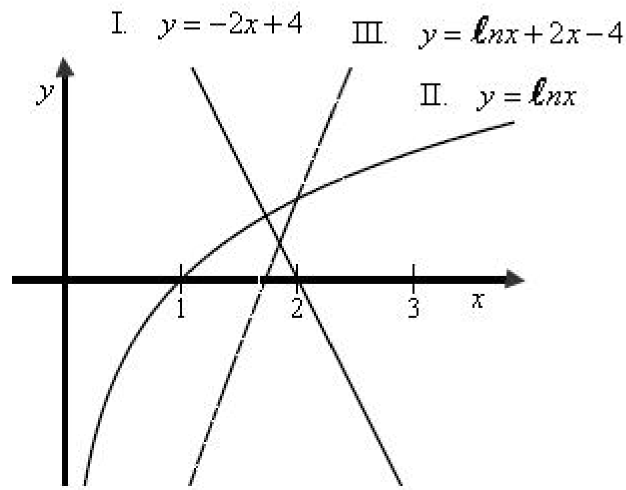
כלומר הפונקציה III **היא ההפרש בין הפונקציות** II **ו-** I **וכאשר ערכיהן שווים (בתחום** $1<x<2$**)**

ערך הפונקציה III **יהיה שווה ל-** 0 **והיא תחתוך את ציר ה-** x **.**

תשובה :נקודת החיתוך של גרף הפונקציה III **עם ציר ה-** x **תהייה בתחום** $1<x<2$

(3) נעדכן את הסקיצה

(הערה – מטעמי נוחות של ציור עם המחשב, לא הובעה יפה הקעירות כלפי מטה של $y=\ell nx+2x-4$ .III **)**



ד. נמצא את שיעור ה- x **של נקודת החיתוך בין הפונקציות:**

$$\ell nx+2x-4=\ell nx$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

$$S_1=\int_2^{2.5}(\ell nx+2x-4-\ell nx)\,dx$$

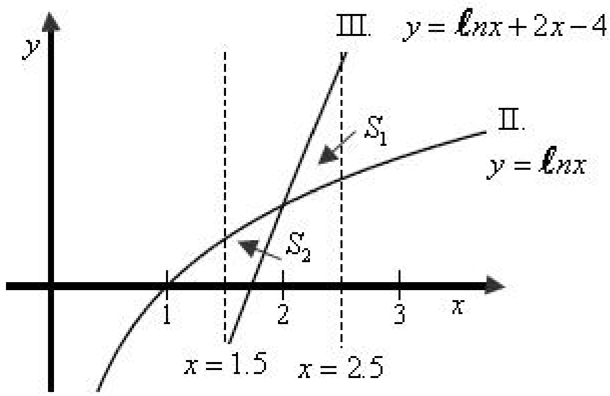
$$S_1=\int_2^{2.5}(2x-4)\,dx$$

$$S_1=\frac{2x^2}{2}-4x\Big]_2^{2.5}=$$

$$S_1=(2.5^2-4\cdot 2.5)-(2^2-4\cdot 2)=$$

$$S_1=-3.75-(-4)$$

$$\boxed{S_1=0.25}$$



$$S_2=\int_{1.5}^{2.}(\ell nx-(\ell nx+2x-4))\,dx$$

$$S_2=\int_{1.5}^{2}(-2x+4)\,dx$$

$$S_2=-\frac{2x^2}{2}+4x\Big]_{1.5}^{2}=$$

$$S_2=(-2^2+4\cdot 2)-(-1.5^2+4\cdot 1.5)=$$

$$S_2=4-3.75$$

$$\boxed{S_2=0.25}$$

$$S=S_1+S_2=0.25+0.25=\boxed{0.5}$$

תשובה: גודל השטח 0.5 **יח"ר**