א. נתון כי קבוצה ובה 68 **אנשים הגיעה ליום כיף בברֵכה.**

(1) נסמן ב- x **את מספר המבוגרים, ובהתאם** $68-x$ **הוא מספר הילדים.**

ידוע שמספר הילדים בקבוצה גדול פי 16 **וממספר המבוגרים.**

המשוואה המתאימה: $68-x=16x$ **.**

$$68=17x \quad /:17$$
$$x=4 \quad \rightarrow 16\cdot 4=64$$

תשובה: מספר המבוגרים הוא 4 **ומספר הילדים הוא** 64**.**

(2)המחיר של כרטיס כניסה לברֵכה לילד זול ב- 28% **מהמחיר של כרטיס כניסה למבוגר.**

נסמן ב- y **את מחיר הכניסה למבוגר, ובהתאם** $\frac{100-28}{100}\cdot y=0.72y$ **הוא מחיר הכניסה לילד.**

הקבוצה נדרשה לשלם 3756 **שקלים עבור כרטיסי הכניסה לכולם.**

המשוואה המתאימה: $4y+64\cdot 0.72y=3756$ **.**

$$4y+46.08y=3756$$
$$50.08y=3756 \quad /:50.08$$
$$y=75 \quad \rightarrow 0.72\cdot 75=54$$

תשובה: מחיר כרטיס הכניסה למבוגר הוא 75 **שקלים ולילד** 54 **שקלים.**

ב. (1) בברכה זו אפשר לרכוש גם כרטיסייה במחיר 545 **שקלים, עבור** 10 **כניסות.**

המחיר הממוצע לכניסה אחת הוא : $\frac{545}{10}=54.5$ **,**

כלומר ההוזלה למבוגר היא משמעותית, $72-54.5=17.5$ **שקלים,**

כאשר המחיר לילד דווקא גבוה בחצי שקל מהמחיר הרגיל.

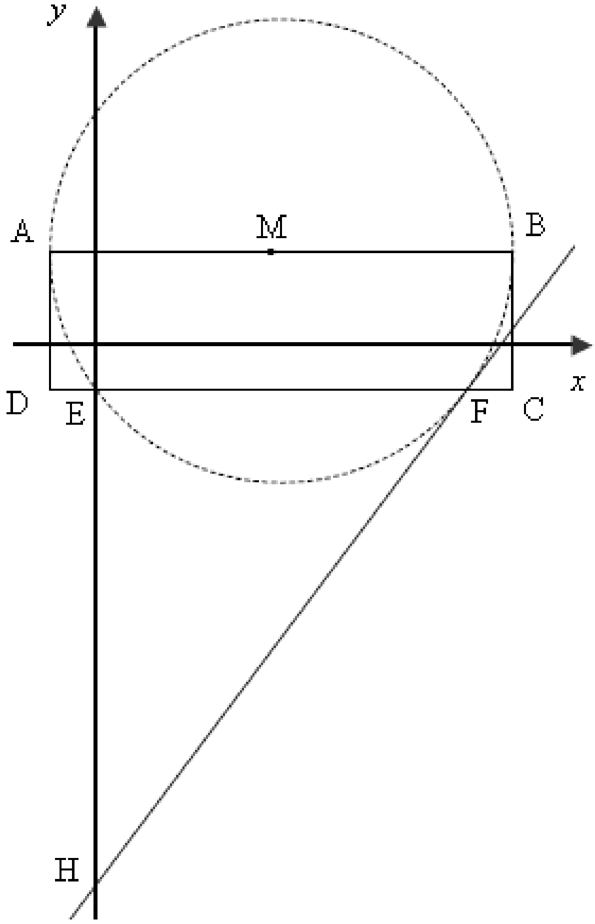
לכן כדאי שייכנסו עם הכרטיסייה כל 4 **המבוגרים ועמם** 6 **ילדים נוספים,**

והתשלום שישלמו יהיה 545 **שקלים במקום** $4\cdot 75+6\cdot 54=624$ **שקלים.**

תשובה: 4 **מבוגרים ו-** 6 **ילדים.**

(2) במקרה זה הקבוצה תחסוך $624-545=79$ **שקלים.**

תשובה:הקבוצה תחסוך 79 **שקלים.**



א. (1) נתון כי $A(-1,2)$ **ו-** $C(9,-1)$ **וצלעות המלבן** ABCD **מ**

הצלעות AD **ו-** BC **מקבילות לציר ה-** y **,**

לכן: $x_D = x_A = -1, \quad x_B = x_C = 9$

הצלעות AB **ו-** DC **מקבילות לציר ה-** x **,**

ולכן: $y_D = y_C = -1, \quad y_B = x_A = 2$

תשובה: $B(9,2)$ **,** $D(-1,-1)$ **.**

(2) מרכז המעגל M **הוא אמצע הקוטר** AB **,**

ונמצא את שיעורי המרכז באמצעות נוסחת אמצע קטע.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+9}{2} = 4, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

ולכן שיעורי מרכז המעגל הם $M(4,2)$ **.**

נמצא את רדיוס המעגל, כאשר הרדיוס MB **מקביל לצי**

ולכן $R = x_B - x_M = 9 - 4 = 5$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$ **.**

ב. (1) נמצא את שיעורי הנקודות E **ו-** F **, שהן נקודות החיתוך**

הצלע DC **מקבילה לציר ה-** x **ולכן** $y_E = y_F = y_C = -1$ **.**

נציב $y = -1$ **במשוואת המעגל:**

$$(x-4)^2 + (-1-2)^2 = 25 \quad \rightarrow (x-4)(x-4) + (-3)^2 = 25$$
$$x^2 - 4x - 4x + 16 + 9 = 25 \quad \rightarrow x^2 - 8x = 0$$
$$x(x-8) = 0$$
$$x_E = 0, \, x_F = 8$$

תשובה: $E(0,-1)$ **,** $F(8,-1)$ **.**

(2) המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. נמצא את שיפוע הרדיוס לנקודה F **:** $m = \frac{2-(-1)}{4-8} = -\frac{3}{4}$

ולכן על פי תנאי ניצבות $-\frac{3}{4} m_{mashik} = -1 \quad \rightarrow m_{mashik} = \frac{-1}{-\frac{3}{4}} \quad \rightarrow m_{mashik} = 1\frac{1}{3}$

משוואת המשיק $y - (-1) = 1\frac{1}{3}(x-8) \quad \rightarrow y + 1 = 1\frac{1}{3}x - 10\frac{2}{3} \quad \rightarrow \boxed{y = 1\frac{1}{3}x - 11\frac{2}{3}}$

תשובה:משוואת המשיק למעגל בנקודה F **היא** $y = 1\frac{1}{3}x - 11\frac{2}{3}$ **.**

נכתב ע"י עפר ילין

ג. שטח משולש הוא מחצית מכפלת צלע בגובה שלה, כאשר $S_{\Delta EFH}=\frac{EF\cdot EH}{2}$ **,**

כי הצלע EF **מאונכת לציר ה-** y **, עליו מונחת הצלע** EH **.**

הנקודה H **על ציר ה-** y **ולכן מתקיים** $x=0$ **ומכאן ששיעורי הנקודה** $H(0,-11\frac{2}{3})$ **.**

$EH=y_E-y_H=-1-(-11\frac{2}{3})=10\frac{2}{3}$ **,** $EF=x_F-x_E=8-0=8$ **.**

$$S_{\Delta EFH}=\frac{10\frac{2}{3}\cdot 8}{2}=42\frac{2}{3}$$

תשובה: שטח ΔEFH **הוא** $42\frac{2}{3}$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $y=\frac{x-4}{8}+\frac{8}{x}$, $(x\neq 0)$ **.**

נמצא את נקודות הקיצון ואת סוגן.

(לנוחות הגזירה נחלק במכנה של המחובר השמאלי)

$$y=\frac{x-4}{8}+\frac{8}{x}\rightarrow \boxed{y=\frac{x}{8}-\frac{1}{2}+\frac{8}{x}}$$

$$y'=\frac{1}{8}-\frac{8}{x^2}\quad\rightarrow \boxed{y'=\frac{x^2-64}{8x^2}}$$

$$0=\frac{x^2-64}{8x^2}\quad\rightarrow 0=x^2-64\quad\rightarrow 64=x^2\quad\rightarrow x=\pm 8$$

$$y(8)=\frac{8-4}{8}+\frac{8}{8}=1.5\quad\rightarrow (8,1.5)$$

$$y(-8)=\frac{-8-4}{8}+\frac{8}{-8}=-2.5\quad\rightarrow (-8,-2.5)$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)

$$f'(-9)=(-9)^2-64>0,\quad f'(-7)=(-7)^2-64<0$$

$$f'(7)=7^2-64<0,\quad f'(9)=9^2-64>0$$

x	9	8	7	0	–7	–8	–9
y'	**+**	0	**-**	$x\neq 0$	**-**	0	**+**
מסקנה	$\nearrow$	**Min**	$\searrow$		$\searrow$	**Max**	$\nearrow$

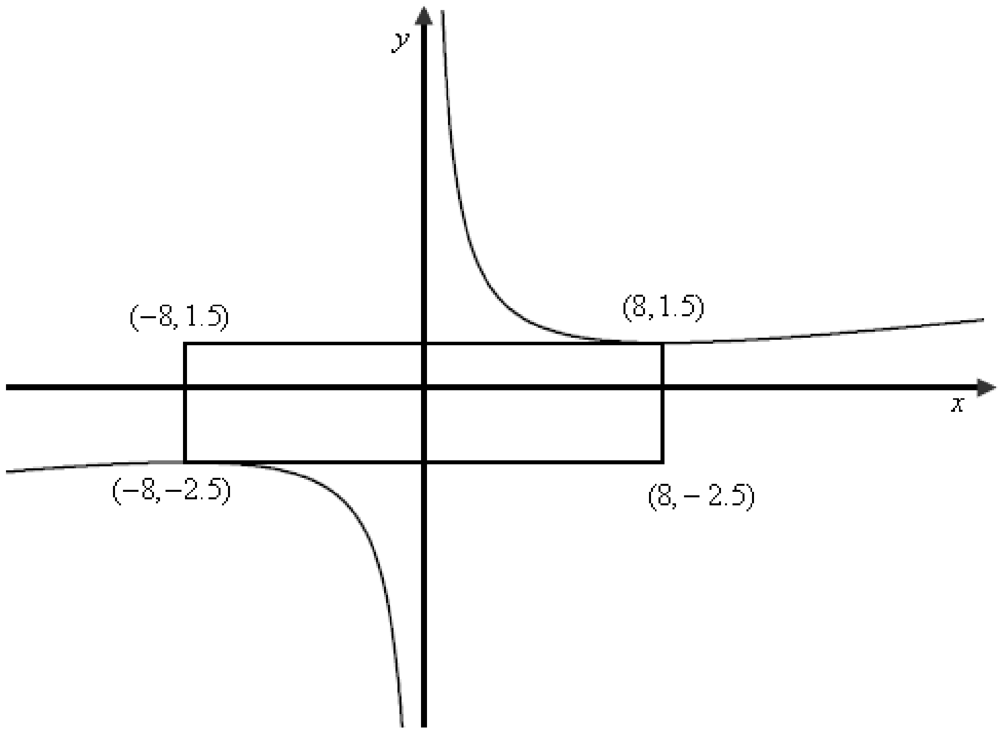
$x=8$ **עוברים מירידה לעליה ולכן מינימום .**

$x=-8$ **עוברים מעליה לירידה ולכן מקסימום.**

תשובה: $(-8,-2.5)$ **מקסימום,** $(8,1.5)$ **מינימום.**

ב. על פי הטבלה, תחומי עלייה $x>8$ **או** $x<-8$ **, ירידה** $0<x<8$ **או** $-8<x<0$ **.**

ג. הסקיצה המתאימה, כולל הישרים המקבילים לצירים עבור סעיף ד:



*** נשים לב ש $x=0$ אסימפטוטה אנכית, עקב תחום הגדרה**

ד. כיוון שצלעות המלבן מקבילות לצירים, הרי שבצלעות האופקיות שיעורי ה- y נשמרים,

ובצלעות האנכיות שיעורי ה- x נשמרים, ומכאן ששיעורי שני הקדקודים האחרים הם $(8,-2.5)$, $(-8,1.5)$ **.**

אורך צלעות המלבן : $8-(-8)=16$ **ו-** $1.5-(-2.5)=4$**.**

שטח המלבן: $16\cdot 4=64$ **יח"ר.**

תשובה: שטח המלבן הוא 64 **יח"ר.**

א. נתונה הפרבולה $y=-x^2+6x+16$

בנקודות A **ו-** B**, שעל ציר ה-** x **, מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=-x^2+6x+16$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm10}{-2}$$

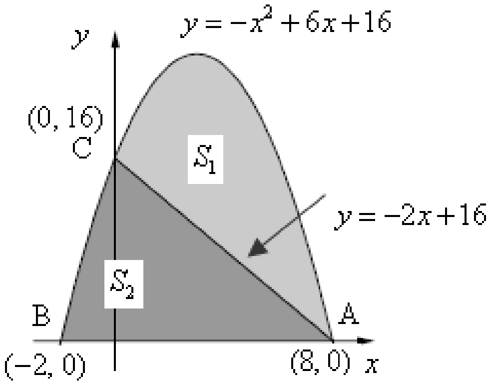
$$x_1=\frac{-6+10}{-2}=\frac{4}{-2}=-2 \quad \rightarrow \boxed{B(-2,0)}$$

$$x_2=\frac{-6-10}{-2}=\frac{-16}{-2}=8 \quad \rightarrow \boxed{A(8,0)}$$

בנקודה C**, שעל ציר ה-** y **, מתקיים** $x=0$ **.**

$$y=-0^2+6\cdot0+16=16 \quad \rightarrow \boxed{C(0,16)}$$

תשובה: $A(8,0)$, $B(-2,0)$, $C(0,16)$.



ב. נחשב את השטח S_1 **המוגבל על ידי הפרבולה ועל ידי הישר** AC **.**

נמצא את שיפוע הישר AC **:** $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{16-0}{0-8}=-2$

$$(0,16),\quad m=-2$$

$$y-16=-2(x-0)$$

$$y=-2x+16$$

	S_1	S_1+S_2
פונקציה עליונה	$y=-x^2+6x+16$	$y=-x^2+6x+16$
פונקציה תחתונה	$y=-2x+16$	$y=0$
x **גדול**	$x=8$	$x=8$
x **קטן**	$x=0$	$x=-2$

$$S_1=\int_0^8(-x^2+6x+16-(-2x+16))\,dx$$

$$S_1=\int_0^8(-x^2+6x+16+2x-16)\,dx$$

$$S_1=\int_0^8(-x^2+8x)\,dx$$

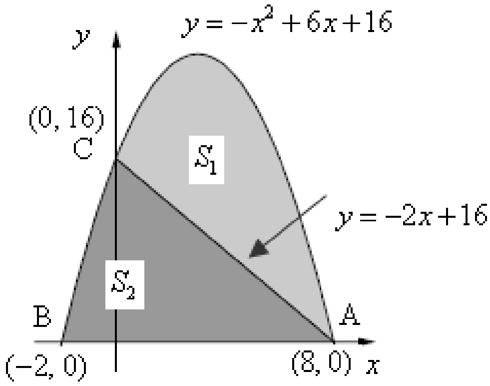
$$S_1=-\frac{x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\Big]_0^8$$

$$S_1=(-\frac{8^3}{3}+4\cdot8^2)-(-\frac{0^3}{3}+4\cdot0^2)$$

$$S_1=85\frac{1}{3}-(0) \quad \rightarrow \boxed{S_1=85\frac{1}{3}}$$

תשובה: $S_1=$ **יח"ר** $85\frac{1}{3}$ **.**

ג. נחשב את S_1+S_2, השטח שבין הפרבולה לבין ציר ה- x .



$$S_1+S_2=\int_{-2}^{8}(-x^2+6x+16-0))\,dx$$

$$S_1+S_2=-\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+16x\Big]_{-2}^{8}$$

$$S_1+S_2=(-\frac{8^3}{3}+3\cdot 8^2+16\cdot 8)-(-\frac{(-2)^3}{3}+3\cdot(-2)^2+16\cdot(-2))$$

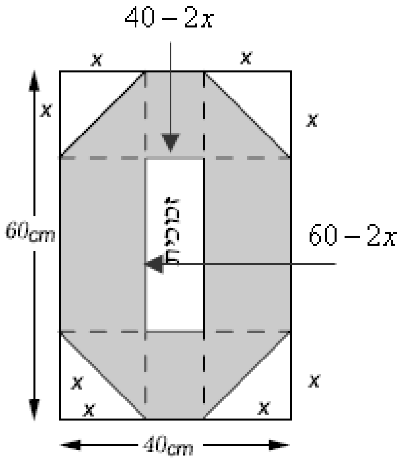
$$S_1+S_2=149\frac{1}{3}-(-17\frac{2}{3})$$

$$\boxed{S_1+S_2=166\frac{2}{3}}$$

והשטח המבוקש: $S_2=166\frac{2}{3}-85\frac{1}{3}=81\frac{1}{3}$

תשובה: $81\frac{1}{3}$ **יח"ר** $=S_2$ **.**

א. (1) נחשב תחילה את שטחי המשולשים הזהים (שטח החרסינה הלבנה).



שטח משולש ישר זווית הוא מחצית מכפלת הניצבים: $\frac{x\cdot x}{2}=\frac{x^2}{2}$ **.**

ארבעת המשולשים זהים ולכן שטחיהם שווים,

ושטח ארבעתם ביחד הוא $4\cdot\frac{x^2}{2}=2x^2$ **.**

ממדי המלבן של הזכוכית הם: $60-2x$ **ו- (כמתואר בציור).**

שטח המלבן הוא מכפלת האורך ברוחב:

$(60-2x)(40-2x)=2400-120x-80x+4x^2=4x^2-200x+2400$ **.**

ולכן גודלו של השטח הלבן: $4x^2-200x+2400+2x^2=6x^2-200x+2400$

תשובה: גודלו של השטח הלבן הוא $6x^2-200x+2400$ **סמ"ר.**

(2) הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח החרסינה האפורה*

שטח כל המרצפת הוא 2400 **סמ"ר** $=60\cdot 40$ **.**

השטח האפור הוא: $2400-(6x^2-200x+2400)=2400-6x^2+200x-2400=-6x^2+200x$

ובהתאם: $\boxed{f(x)=-6x^2+200x}$ **. נמצא את נקודת הקיצון:**

$$\boxed{f'(x)=-12x+200}$$

$$12x=200 \quad /:12$$

$$\boxed{x=16\frac{2}{3}}$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון : $f'(17)=-12\cdot17+200<0$, $f'(16)=-12\cdot16+200>0$

x	17	$16\frac{2}{3}$	16
$P'(x)$	-	0	+
מסקנה	↘	**Max**	↗

ב- $x=16\frac{2}{3}$ **עוברת הפונקציה מעלייה לירידה ולכן מקסימום.**

תשובה: $x=16\frac{2}{3}$ **, עבורו שטח החרסינה האפורה יהיה מקסימלי.**

ב. נציב $x=16\frac{2}{3}$ **בתבנית פונקציית החרסינה האפורה:** $f(16\frac{2}{3})=-6\cdot(16\frac{2}{3})^2+200\cdot16\frac{2}{3}=1,666\frac{2}{3}$

תשובה: השטח המקסימלי של החרסינה האפורה במרצפת הוא $1,666\frac{2}{3}$ **סמ"ר.**

6 למבחן מותאם בלבד

א. לפונקציה $f(x)=2x-k\sqrt{x}$ **יש נקודת קיצון בנקודה שבה** $x=9$ **.**

לכן, עבור $x=9$ **מתקיים** $f'(9)=0$ **.**

$$f'(x)=2-\frac{k}{2\sqrt{x}}$$

$$0=2-\frac{k}{2\sqrt{9}}$$

$$0=2-\frac{k}{6} \quad /\cdot 6$$

$$0=12-k$$

$$\boxed{k=12}$$

תשובה: $k=12$ **.**

נציב $k=12$ **בתבנית הפונקציה ונקבל** $f(x)=2x-12\sqrt{x}$

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x\ge 0$ **, כי ביטוי שבתוך השורש הוא אי-שלילי**

תשובה: $x\ge 0$

ג. נמצא את סוגה של נקודת הקיצון, שבה $x=9$.

$$\boxed{f(x)=2x-12\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f'(x)=2-\frac{12}{2\sqrt{x}}}$$

$$0=2-\frac{12}{2\sqrt{x}} \quad /\cdot 2\sqrt{x}$$

$$0=4\sqrt{x}-12$$

$$-4\sqrt{x}=-12 \quad /:(-4)$$

$$\sqrt{x}=3$$

$$x=9$$

הערה – הבדיקה נעשתה על מנת לוודא שאין נקודות קיצון פנימיות נוספות, לצורך הכנת טבלת עלייה וירידה.

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון:

$$f'(8)=2-\frac{12}{2\sqrt{8}}=-0.1<0, \quad f'(10)=2-\frac{12}{2\sqrt{10}}=0.1>0$$

x	10	9	8	0
$f'(x)$	+	0	-	
מסקנה	↗	**Min**	↘	

ב- $x=9$ **עוברים מירידה לעלייה ולכן מינימום .**

תשובה: נקודת מינימום.

ד. על פי הטבלה: עלייה $x>9$, ירידה $0<x<9$.