נתונות שתי סדרות. סדרה אחת חשבונית וסדרה אחת הנדסית.

בכל סדרה האיבר הראשון הוא 9**.**

האיבר השני בסדרה החשבונית גדול ב- 2 **מהאיבר השני בסדרה ההנדסית.**

האיבר השלישי זהה בשתי הסדרות.

איברי הסדרה החשבונית: $9+2d\ ,9+d\ ,9$ **, כאשר** d **הוא הפרש הסדרה.**

בהתאם איברי הסדרה ההנדסית הם: $9+2d$ **,** $7+d$ **,** 9

בסדרה הנדסית המנה קבועה, לכן:

$$\frac{9+2d}{7+d}=\frac{7+d}{9}$$

$$9(9+2d)=(7+d)^2$$

$$81+18d=49+14d+d^2$$

$$d^2-4d-32=0$$

$$d_{1,2}=\frac{4\pm12}{2}$$

$$d_1=8\,,d_1=-4$$

עבור $d=8$ **איברי הסדרה החשבונית הם:** $9,17,25...$ **, ואיברי הסדרה ההנדסית** $9,15,25...(q=1\frac{2}{3})$

עבור $d=-4$ **איברי הסדרה החשבונית הם:** $9,5,1...$ **, ואיברי הסדרה ההנדסית** $9,3,1...(q=\frac{1}{3})$

תשובה: אפשרות ראשונה: $a_2=17$ **בחשבונית,** $a_2=15$ **בהנדסית,**

אפשרות שנייה: $a_2=5$ **בחשבונית,** $a_2=3$ **בהנדסית**

א. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{x}}$, $g(x)=\frac{e^{-2x}}{1+e^{x}}$.

(1) נמצא תחומי עלייה וירידה של $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{x}}$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(1+e^{x})-e^{x}e^{-x}}{(1+e^{x})^2}$$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}-1-1}{(1+e^{x})^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-e^{-x}-2}{(1+e^{x})^2}}$$

הפונקציה מוגדרת לכל x **כי מכנה הפונקציה הוא סכום של שני ביטויים חיוביים.**

מונה הנגזרת הוא שלילי לכל x **ומכנה הנגזרת חיובי לכל** x **לכן הנגזרת שלילית לכל** x

מסקנה: הפונקציה $f(x)$ **יורדת לכל** x

(2) נמצא תחומי עלייה וירידה של $g(x)=\frac{e^{-2x}}{1+e^{x}}$

$$g'(x)=\frac{-2e^{-2x}(1+e^{x})-e^{x}e^{-2x}}{(1+e^{x})^2}$$

$$g'(x)=\frac{-2e^{-2x}-2e^{-x}-e^{-x}}{(1+e^{x})^2}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{-2e^{-2x}-3e^{-x}}{(1+e^{x})^2}}$$

הפונקציה מוגדרת לכל x **כי מכנה הפונקציה הוא סכום של שני ביטויים חיוביים.**
מונה הנגזרת הוא שלילי לכל x **ומכנה הנגזרת חיובי לכל** x **לכן הנגזרת שלילית לכל** x
מסקנה: הפונקציה $g(x)$ **יורדת לכל** x

ב. (1) בנקודת חיתוך עם חיתוך עם ציר y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,0.5)\leftarrow$ $f(0)=\frac{e^{-0}}{1+e^{0}}=0.5$

$f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{x}}$ **היא מנה של שני ביטויים חיוביים לכל** x **ולכן גרף הפונקציה כולו מעל ציר ה-** x **.**

תשובה: $(0,0.5)$ **, אין חיתוך עם ציר ה-** x **.**

(2) בנקודת חיתוך עם חיתוך עם ציר y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל** $(0,0.5)\leftarrow$ $g(0)=\frac{e^{-20}}{1+e^{0}}=0.5$

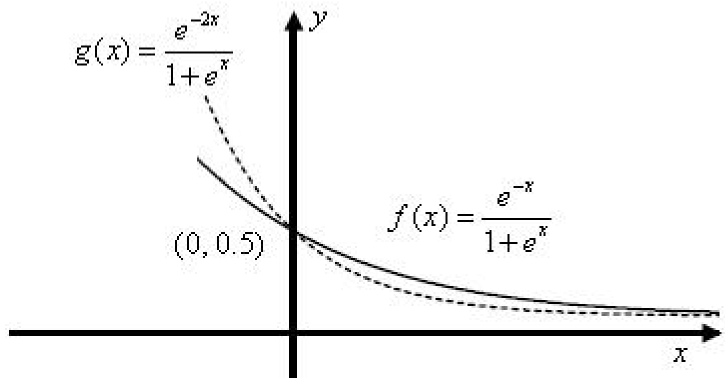
$g(x)=\frac{e^{-2x}}{1+e^{x}}$ **היא מנה של שני ביטויים חיוביים לכל** x **ולכן גרף הפונקציה כולו מעל ציר ה-** x **.**

תשובה: $(0,0.5)$ **, אין חיתוך עם ציר ה-** x **.**

ג. נשים לב (לא נדרש בשאלה)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{x}}=\frac{0}{\infty}=0$ **ובהתאם הקרן החיובית של ציר ה-** x **היא אסימפטוטה אופקית של** $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{x}}$

סרטוט סקיצה, כולל עבור סעיף ה.



ד. (1) $e^{-x}>e^{-2x}$

כיוון שבשני האגפים פונקציה עולה, נקבל $-x>-2x \quad \to x>0$

תשובה: $x>0$

(2) $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{x}}$ **,** $g(x)=\frac{e^{-2x}}{1+e^{x}}$

$f(x)>g(x)$ **עבור** $x>0$ **, שכן המכנים של שתי הפונקציות חיוביים לכל** x **,**

והמונה של $f(x)$ **גדול מהמונה של** $g(x)$ **עבור** $x>0$ **על פי סעיף ד (1).**

תשובה: $x>0$

ה. ראה הסרטוט בסעיף ג.

========================

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}\ell n^3 x+\frac{1}{4}\ell n^4 x$ **.**

נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- ℓn ***לא*** **יכולה לקבל מספרים אי חיוביים, לכן** $x>0$ **.**

תשובה: $x>0$

ב. נמצא את נקודת הקיצון ואת סוגה:

$$f(x)=\frac{1}{3}\ell n^3 x+\frac{1}{4}\ell n^4 x$$

$$f'(x)=3\cdot\frac{1}{3}\frac{\ell n^2 x}{x}+4\cdot\frac{1}{4}\frac{\ell n^3 x}{x} \quad \rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{\ell n^2 x+\ell n^3 x}{x}}$$

$$0=\ell n^2 x+\ell n^3 x \quad \rightarrow 0=\ell n^2 x(1+\ell n x)$$

$$\ell n^2 x=0 \quad \rightarrow \ell n x=0 \quad \rightarrow x=1 \quad \rightarrow y=\frac{1}{3}\ell n^3 1+\frac{1}{4}\ell n^4 1=0 \qquad \rightarrow (1,0)$$

$$\ell n x=-1 \quad \rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e} \quad \rightarrow y=\frac{1}{3}\ell n^3(\frac{1}{e})+\frac{1}{4}\ell n^4(\frac{1}{e})=-\frac{1}{12} \qquad \rightarrow (\frac{1}{e},-\frac{1}{12})$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה והנגזרת שלה.

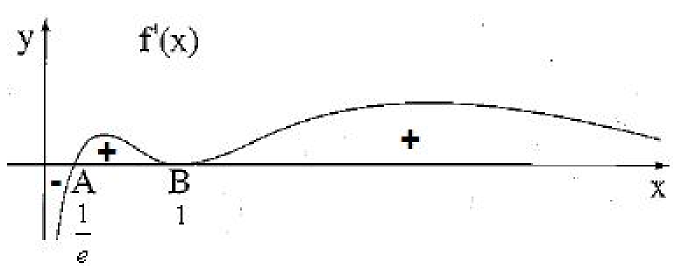
$$f'(1.2)=\ell n^2 0.2+\ell n^3 0.2=-1.58<0, \quad f'(0.2)=\ell n^2 1.2+\ell n^3 1.2=0.04>0$$

x	0	0.2	$\frac{1}{e}=0.37$		1	1.2
$f(x)$		0	$-\frac{1}{12}$		0	
$f'(x)$		-	0		0	+
מסקנה		↘	Min	↗	**פיתול**	↗

תשובה: $(\frac{1}{e},-\frac{1}{12})$ **מינימום**

ג. הסקיצה של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$ **,** ***משמאל***

כמו בטבלת העלייה והירידה:



$f'(x)>0$ **בתחומים** $x>1$ **או** $\frac{1}{e}<x<1$ **ולכן** $B(1,0)$

$f'(x)<0$ **בתחום** $0<x<\frac{1}{e}$ **ולכן** $A(\frac{1}{e},0)$

תשובה: $A(\frac{1}{e},0)$ **,** $B(1,0)$

<u>הערה (מעבר לתוכנית הלימודים של 4 יחידות)</u>

שיעורי ה- x **של נקודות הקיצון של** $f'(x)$ **הם שיעורי ה-** x **של נקודות הפיתול של** $f(x)$ **.**

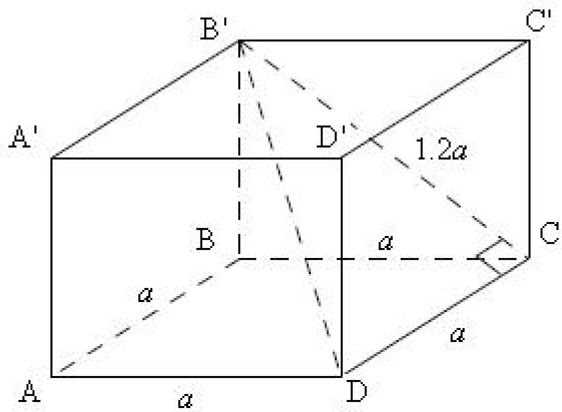
כאשר המשיק בנקודת הפיתול, שבה $x=1$ מקביל לציר ה- x .

4

א. בסיס התיבה הוא ריבוע, שזוויותיו ישרות.

משולש DCB' **הוא ישר זווית (**$\sphericalangle DCB'=90^\circ$**), שכן מקצוע הבסיס** DC **מאונך לפאה** $CBB'C'$ **,**

ולכן מאונך גם לכל ישר העובר דרך עקבו ומונח על הפאה.



נתון כי שטח המשולש DCB' **שווה ל-** $0.6a^2$ **, כאשר** $DC=a$

ולכן על פי נוסחת שטח משולש:

$\underline{\Delta DCB'}$

$$0.6a^2=\frac{a\cdot CB'}{2}$$

$$1.20.6a^2=a\cdot CB' \quad /:a>0$$

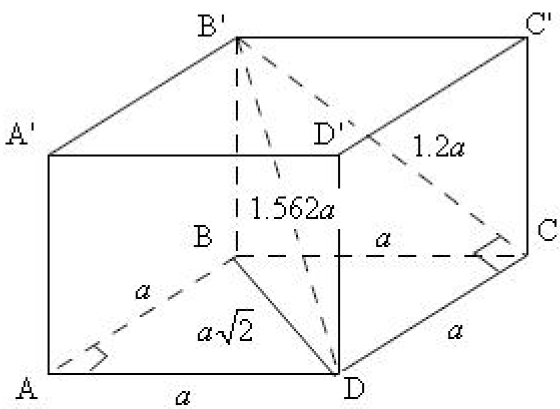
$$\boxed{CB'=1.2a}$$

תשובה: $CB'=1.2a$

ב. נמצא את גודל הזווית שבין DB' **למישור** $ABCD$ **.**

זווית זו היא $\sphericalangle B'DB$ **- הזווית שבין המשופע להיטל שלו על הבסיס, שכן** BB' **הוא האנך מ-** B' **לבסיס.**

נמצא, תחילה, את DB' **ואת** DB **באמצעות משפט פיתגורס.**



$\underline{\Delta DCB'}$

$$(DB')^2=(CB')^2+(DC)^2$$

$$(DB')^2=(1.2a)^2+a^2$$

$$(DB')^2=2.44$$

$$\boxed{DB'=1.562a}$$

$\underline{\Delta ADB}$

$$(DB')^2=(CD)^2+(BD)^2$$

$$(DB')^2=a^2+a^2$$

$$(DB')^2=2a^2$$

$$\boxed{DB'=a\sqrt{2}}$$

$\underline{\Delta B'DB}$

$$\cos\sphericalangle B'DB=\frac{BD}{CB'}=\frac{a\sqrt{2}}{1.562a}$$

$$\cos\sphericalangle B'DB=0.905$$

$$\boxed{\sphericalangle B'DB=25.12^\circ}$$

תשובה: הזווית שבין DB' **למישור** $ABCD$. **היא בת** 25.12°

ג. נמצא את גודל הזווית בין המישור DCB' **למישור** $ABCD$ **- זווית** $\sphericalangle B'CB$ **.**

ישר החיתוך בין המישורים הוא מקצוע הבסיס DC **, כאשר האנכים מהמישורים הם:** $B'C$ **ו-** CB'**.**

$\underline{\Delta B'CB}$

$$\cos\sphericalangle B'CB=\frac{BC}{CB'}=\frac{a}{1.2a}$$

$$\cos\sphericalangle B'CB=0.833$$

$$\boxed{\sphericalangle B'CB=33.56^\circ}$$

תשובה: הזווית בין המישור DCB' **למישור** ABCD **היא בת** 33.56° .