א. הסדרה a_n **מוגדרת לכל** n **טבעי לפי הכלל** $a_{n+1}=3a_n+5$ **.**

הסדרה b_n **מוגדרת לכל** n **טבעי על ידי** $b_n=a_n+2.5$.

נוכיח כי b_n **סדרה הנדסית, כאשר נראה כי המנה של** $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ **היא קבועה .**

על פי הגדרת הסדרה b_n

$$b_{n+1}=a_{n+1}+2.5$$
$$b_{n+1}=3a_n+5+2.5$$
$$b_{n+1}=3a_n+7.5$$

ועתה נראה כי המנה קבועה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3a_n+7.5}{a_n+2.5}=\frac{3(a_n+2.5)}{a_n+2.5}=3$$

לכן המנה בין שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב- n **) והסדרה הנדסית.**

$a_n\neq-2.5$ **לכן אין בסדרה** b_n **איבר שערכו** 0 **(אחרת לא יכלה להיות סדרה הנדסית).**

תשובה: הוכַח, והמנה היא 3 **.**

ב. נתון כי $b_1=2$ **ומנת הסדרה** 3 **על פי סעיף א.**

$$b_n=a_n+2.5$$
$$a_n=b_n-2.5$$
$$a_n=b_1q_b^{\,n-1}-2.5$$
$$\boxed{a_n=2\cdot3^{n-1}-2.5}$$

תשובה: $a_n=2\cdot3^{n-1}-2.5$ **.**

ג. (1) נמצא את סכום איברי הסדרה b_n **באמצעות נוסחת הסכום של סדרה הנדסית**

$$S_n^b=\frac{2(3^n-1)}{3-1}$$
$$\boxed{S_n^b=3^n-1}$$

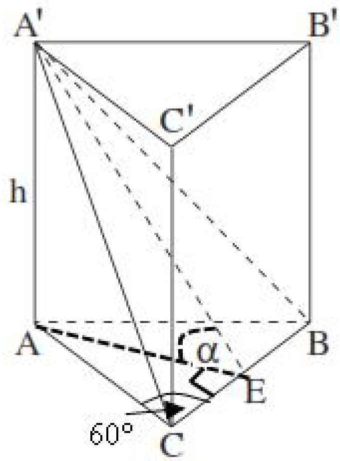
תשובה: 3^n-1

(2) $b_n=a_n+2.5$ **ובהתאם** $a_n=b_n-2.5$ **.**

סכום איברי הסדרה a_n **הוא, אם כך, כסכום איברי הסדרה** b_n **בהפחתת** 2.5 **לכל איבר בסדרה.**

לכן, סכום איברי הסדרה a_n **הוא** $3^n-1-2.5n$ **.**

תשובה: $3^n-1-2.5n$**.**



א. כיוון שבסיס המנסרה הוא משולש שווה צלעות,

הרי שפאות המנסרה חופפות זו לזו,

ולכן אלכסוני הפאות שווים ו- $CA'B$ הוא שווה שוקיים,

והגובה $A'E$ הוא גם תיכון לבסיס משולש זה .

ובהתאם AE הוא גובה לצלע BC במש"ץ ΔABC .

<u>A'AE</u>

$$\tan\sim = \frac{A'A}{AE}$$

$$\boxed{AE = \frac{h}{\tan\sim}}$$

<u>AEC</u>

$$\sin 60° = \frac{AE}{AC}$$

$$\boxed{AC = \frac{2h}{\sqrt{3}\tan\sim}}$$

תשובה: אורך צלע הבסיס הוא $\frac{2h}{\sqrt{3}\tan\sim}$.

ב. הזווית בין $A'C$ למישור הבסיס ABC,

היא $\sphericalangle A'CA$ שבין $A'C$ (המשופע) לבין ההיטל שלו לבסיס ABC, ומתקבלת במשולש ישר הזווית $A'AC$ $(\sphericalangle A = 90°)$.

נתון כי $\sim = 30°$ לכן $AC = \frac{2h}{\tan 30°\sqrt{3}} = 2h$

<u>A'AC</u>

$$\tan\sphericalangle A'CA = \frac{A'A}{AC}$$

$$\tan\sphericalangle A'CA = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle A'CA = 26.565°}$$

תשובה: הזווית בין $A'C$ למישור הבסיס ABC היא בת $26.565°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2$ **בקטע** $-\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה

$$\cos x\ne 0 \quad \to x\ne\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$k=0 \quad \to x\ne\frac{\pi}{2}, \quad k=-1 \quad \to x\ne-\frac{\pi}{2}$$

$x=\frac{\pi}{2}$ **ו-** $x=-\frac{\pi}{2}$ **מאפסים מכנה ולא מונה, ולכן הישרים המתאימים הם אסימפטוטות אנכיות.**

תשובה: תחום ההגדרה $x\ne\pm\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$ **,**

$x=\frac{\pi}{2}$ **,** $x=-\frac{\pi}{2}$ **אסימפטוטות המקבילות לציר ה-** y .

(2) נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה- x **בקטע הנתון.**

$$\frac{1}{\cos^2 x}-2=0 \quad \to 1-2\cos^2 x=0$$

$$-\cos 2x=0 \quad \to \cos 2x=0$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad \to x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$

$$k=0 \quad \to x=\frac{\pi}{4}, \quad k=1 \quad \to x=\frac{3\pi}{4}, \quad k=2 \quad \to x=\frac{5\pi}{4}$$

$$k=-1 \quad \to x=-\frac{\pi}{4}, \quad k=-2 \quad \to x=-\frac{3}{4}k=-3 \quad \to x=-\frac{5\pi}{4}$$

תשובה: $(\frac{5\pi}{4},0)$, $(\frac{3\pi}{4},0)$, $(\frac{\pi}{4},0)$, $(-\frac{\pi}{4},0)$, $(-\frac{3\pi}{4},0)$, $(-\frac{5\pi}{4},0)$

ב. נחשב את גודל השטח המפוצל (המקווקו).

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{\cos^2 x}-2)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(0-\frac{1}{\cos^2 x}+2))dx+=(\tan x-2x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+(-\tan x+2x)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$S=(\tan\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{4})+(-\tan\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{4}+\tan 0+2\cdot 0)$$

$$S=\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-2$$

$$\boxed{S=0.779}$$

תשובה: גודל השטח הוא 0.779 .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell og_2(-x^2+4x+32)$ **.**

נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- ℓog לא יכולה לקבל מספרים אי-חיוביים.

$$-x^2+4x+32>0$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 12}{-2}$$
$$x_1=-4,\quad x_2=8$$

מתקבלת פרבולה בעלת מקסימום, כאשר היא חיובית עבור $-4<x<8$.

תשובה: $-4<x<8$.

ב. בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$\ell og_2(-x^2+4x+32)=0$$
$$-x^2+4x+32=1 \quad \to -x^2+4x+31=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{140}}{-2}$$
$$x_1=-3.92 \quad \to \boxed{(-3.92,0)} \quad x_2=7.92 \quad \to \boxed{(7.92,0)}$$

בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$

$f(0)=\ell og_2 32=5$ **ושיעורי הנקודה הם** $(0,5)$ **.**

תשובה: $(7.92,0)$ **,** $(-3.92,0)$ **,** $(0,5)$

ג. נמצא את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

$$\boxed{f(x)=\ell og_2(-x^2+4x+32)}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x+4}{(-x^2+4x+32)\ell n\,2}}$$
$$-2x+4=0 \quad \to x=2$$
$$f'(1)=\frac{-2\cdot 1+4}{+}>0,\quad f'(3)=\frac{-2\cdot 3+4}{+}<0 \quad \to x=2, Max$$

תשובה: ירידה: $2<x<8$ **, עלייה** $-4<x<2$ **.**

ד. נגזרת הפונקציה מתאפסת עבור $x=2$ **וערך הפונקציה בנקודה זו הוא** $\ell og_2 36$ **.**

בנקודה זו המשיק יקביל לציר ה- x **ומשוואתו** $y=\ell og_2 36$ **.**

תשובה: משוואת המשיק היא $y=\ell og_2 36$ **.**

נוסחת הגידול והדעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$ **, כאשר** M_0 **- הכמות ההתחלתית**

q **הוא גורם הגידול,** M_t **הכמות לאחר זמן** t **.**

א. כעבור 10 **שנים (** $1/1/2000 - 1/1/2010$ **) גדלה האוכלוסייה ב-** 63% **ממחירו לאחר סיום השיפוצים,**

כלומר הכמות עלתה מ- M_0 **ל-** $1.63M_0$ **ב-** 10 **שנים.**

$$1.63M_0 = M_0 \cdot q^{10} \quad / : M_0$$

$$1.63 = q^{10}$$

$$q = \sqrt[10]{1.63}$$

$$\boxed{q = 1.05}$$

נמצא כעבור כמה שנים , החל ב- $1/1/2000$ **, גדל מספר התושבים מ-** 2.5 **מיליון ל-** 8 **מיליון.**

$$8 = 2.5 \cdot 1.05^t \quad / : 2.5$$

$$3.2 = 1.05^t$$

$$\ln 3.2 = \ln 1.05^t$$

$$\ln 3.2 = t \ln 1.05$$

$$\frac{\ln 3.2}{\ln 1.05} = t$$

$$\boxed{t = 23.84}$$

תשובה כעבור 23.84 **שנים .**

(1) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2-m}-e^{m-x^2}$ **.**

נמצא את שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.

$$f'(x)=2x\cdot e^{x^2-m}+2x\cdot e^{m-x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=2x\cdot(e^{x^2-m}+e^{m-x^2})}$$

$$0=2x\cdot(+)\quad\leftarrow e^{x^2-m}+e^{m-x^2}\leftarrow e^{r(X)}>0$$

$$x=0$$

$$f'(-1)=-2\cdot(+)<0,\quad f'(1)=2\cdot(+)>0\quad\rightarrow Min$$

$$x=0\quad\rightarrow f(0)=e^{-m}-e^{m}\quad\rightarrow(0,e^{-m}-e^{m})$$

תשובה: $(0,e^{-m}-e^{m})$ **מינימום.**

(2) כיוון ששיפוע המשיק הוא אפס, הרי שהוא עובר בנקודת המינימום של הפונקציה.

שיעורי נקודת ההשקה הם $(0,0)$ **כי משוואת המשיק היא** $y=0$ **, ושיעור ה-** x **בקיצון הוא** 0 **.**

$$e^{-m}-e^{m}=0$$

$$e^{-m}=e^{m}$$

$$-m=m$$

$$\boxed{m=0}$$

תשובה: $m=0$ **.**