

נסמן ב- x את מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה (קמ"ש, קבועה).
נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

דורך-מרחק - s ק"מ	מהירות - v קמ"ש	זמן - t שעות	
$\frac{3}{4}x$	x	$\frac{3}{4}$	מעיר A עד מקום התקלה
10	50	$\frac{1}{5}$	ממקום תקלה חזרה למוסך
-	-	$\frac{33}{60} = \frac{11}{20}$	המתנה במוסך
$120 - (\frac{3}{4}x - 10) = 130 - \frac{3}{4}x = \frac{520 - 3x}{4}$	$x - 10$	$\frac{520 - 3x}{4(x - 10)}$	מהמוסך לעיר B

זמן הנסיעה המתוכנן, במהירות x של מרחק 120 ק"מ, הוא $\frac{120}{x}$

הנהג הגיע ל- B באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת,

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{11}{20} + \frac{520 - 3x}{4(x - 10)} = \frac{120}{x} + 1$$

כלומר המשוואה המתאימה:

נפתור את המשוואה:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{11}{20} + \frac{520 - 3x}{4(x - 10)} = \frac{120}{x} + 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{520 - 3x}{4(x - 10)} = \frac{120}{x} \quad / \cdot 4x(x - 10)$$

$$2x(x - 10) + x(520 - 3x) = 480(x - 10)$$

$$2x^2 - 20x + 520x - 3x^2 = 480x - 4800$$

$$-x^2 + 20x + 4800 = x$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm 140}{-2}$$

$$\boxed{x = 80} \quad \leftarrow x > 0$$

תשובה: מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה 80 קמ"ש.

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 = 88 \quad \text{אגף שמאל:} \quad \frac{(6 \cdot 1 - 2) \cdot 4^{2 \cdot 1 + 1} + 8}{3} = \frac{264}{3} = 88 \quad \text{אגף ימין:}$$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n = k$ טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^4 + \dots + (6k - 1) \cdot 4^{2k} = \frac{(6k - 2) \cdot 4^{2k+1} + 8}{3} \quad \text{כלומר:}$$

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$, לכן צ"ל

$$\frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^4 + \dots + (6k - 1) \cdot 4^{2k} + (6k + 2) \cdot 4^{2k+1} + (6k + 5) \cdot 4^{2k+2}}{3} = \frac{(6k + 4) \cdot 4^{2k+3} + 8}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(6k - 2) \cdot 4^{2k+1} + 8}{3} + (6k + 2) \cdot 4^{2k+1} + (6k + 5) \cdot 4^{2k+2} = \frac{(6k + 4) \cdot 4^{2k+3} + 8}{3}$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל

$$\Leftrightarrow \frac{(6k - 2) \cdot 4^{2k+1} + 8 + 3(6k + 2) \cdot 4^{2k+1} + 3(6k + 5) \cdot 4^{2k+2}}{3} = \frac{(6k + 4) \cdot 4^{2k+3} + 8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(6k - 2) \cdot 4^{2k+1} + 3(6k + 2) \cdot 4^{2k+1} + 12(6k + 5) \cdot 4^{2k+1} + 8}{3} = \frac{16(6k + 4) \cdot 4^{2k+1} + 8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{2k+1}(6k - 2 + 3(6k + 2) + 12(6k + 5)) + 8}{3} = \frac{16(6k + 4) \cdot 4^{2k+1} + 8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{2k+1}(6k - 2 + 18k + 6 + 72k + 60) + 8}{3} = \frac{16(6k + 4) \cdot 4^{2k+1} + 8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{2k+1}(96k + 64) + 8}{3} = \frac{16(6k + 4) \cdot 4^{2k+1} + 8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{2k+1} \cdot 16(6k + 4) + 8}{3} = \frac{16(6k + 4) \cdot 4^{2k+1} + 8}{3}$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n = 1$,

הראינו שאם הטענה נכונה עבור $n = k$ טבעי כלשהו,

אז היא נכונה עבור $n = k + 1$

לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

נכתב ע"י עפר ילין

ב. יש למצוא את ערך הביטוי $2 \cdot 4 + 5 \cdot 16 + 8 \cdot 64 \dots + 26 \cdot 262,144$

נשים לב כי עבור $n = 4$ מתקבל מהטענה שהוכחה בסעיף א –

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^4 + \dots + (6 \cdot 4 - 1) \cdot 4^{2^4} = \frac{(6 \cdot 4 - 2) \cdot 4^{2^4+1} + 8}{3}$$

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^4 + \dots + 23 \cdot 4^8 = 1,922,392$$

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^4 + \dots + 23 \cdot 4^8 + 26 \cdot 262,144 = 1,922,392 + 26 \cdot 262,144 \quad \text{ולכן:}$$

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^4 + \dots + 23 \cdot 4^8 + 26 \cdot 262,144 = 8,738,136 \quad \text{כלומר:}$$

$$8,738,136 \quad \text{תשובה:}$$

א. נמצא את ההסתברות שיהיה נקר בדיוק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים החדשים.

ההסתברות שיהיה נקר (פנצ'ר) בגלגל חדש בזמן הטיול היא 0.05 .

ההסתברות שיהיה נקר בגלגל הרזרבי בזמן הטיול היא 0.25 .

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $k=1$, $n=4$, $p=0.05$

$$P_n(k) = \binom{n}{k} (p)^k (1-p)^{n-k} \text{ נחשב באמצעות נוסחת ברנולי}$$

$$P_4(1) = \binom{4}{1} 0.05^1 (1-0.05)^{4-1}$$

$$P_4(1) = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot 0.05 \cdot 0.95^3$$

$$P_4(1) = 4 \cdot 0.05 \cdot 0.95^3$$

$$P_4(1) = 0.1715$$

תשובה: ההסתברות שיהיה נקר בדיוק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים החדשים היא 0.1715 .

ב. נניח שההסתברות לנקר נוסף לא משתנה, כי מצוין שהנקר הראשון היה בתחילת הטיול.

(1) נחשב את ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל הרזרבי מבין ארבעת הגלגלים.

כלומר, שיהיה נקר בגלגל הרזרבי ולא יהיה נקר בשלושת הגלגלים האחרים.

$$P = 0.25 \cdot (1-0.05)^3 = 0.25 \cdot 0.95^3$$

$$P = 0.2143$$

תשובה: ההסתברות היא 0.2143 .

(2) נחשב את ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים.

כלומר, שיהיה נקר בגלגל הרזרבי ולא יהיה נקר בשלושת הגלגלים האחרים ($p=0.2143$),

או שיהיה נקר באחד מתוך שלושת הגלגלים האחרים ולא יהיה נקר בגלגל הרזרבי.

נחשב את ההסתברות שיהיה נקר באחד מתוך שלושת הגלגלים האחרים.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $k=1$, $n=3$, $p=0.05$

$$P_3(1) = \binom{3}{1} 0.05^1 (1-0.05)^{3-1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot 0.05 \cdot 0.95^2 = 3 \cdot 0.05 \cdot 0.95^2 = 0.1354$$

$$P = 0.2143 + 0.1354 \cdot 0.75 = 0.3158 \text{ ולכן ההסתברות המבוקשת היא:}$$

תשובה: ההסתברות היא 0.3158 .

(3) זו הסתברות מותנית: ההסתברות שהנקר היה בגלגל הרזרבי, אם ידוע שהיה נקר רק בגלגל אחד.

$$P(\text{נקר בגלגל אחד} / \text{נקר ברזרבי}) = \frac{P(\text{pancture in the spare} \cap \text{pancture in 1 wheel})}{P(\text{pancture in 1 wheel})} = \frac{0.2143}{0.3158} = 0.6785$$

תשובה: ההסתברות היא 0.6785 .

נכתב ע"י עפר ילין

נתונים

1. ANB משיק למעגל בנקודה N

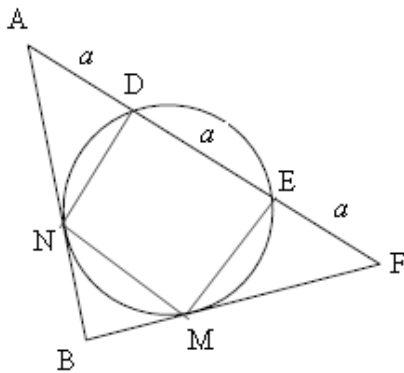
2. FMB משיק למעגל בנקודה M

3. $AD = DE = EF$

צ"ל

א. $AN = MF$ ב. $\triangle ADN \cong \triangle FEM$

ג. במרובע MNDE יש שתי צלעות מקבילות זו לזו



נימוק	טענה	הסבר	
נתון + סימון	$AD = DE = EF = a$	4	3
נתון	ANB משיק למעגל בנקודה N	5	1
אם מנקודה יוצאים משיק וחותר למעגל, אז ריבוע המשיק שווה למכפלת החותר בחלקו החיצוני	$AN^2 = AD \cdot AE$	6	5
הצבה וחישוב	$AN^2 = a \cdot (a + a) = 2a^2$	7	5, 4
נתון	FMB משיק למעגל בנקודה M	8	2
אם מנקודה יוצאים משיק וחותר למעגל, אז ריבוע המשיק שווה למכפלת החותר בחלקו החיצוני	$FM^2 = FE \cdot FD$	9	8
הצבה וחישוב	$FM^2 = a \cdot (a + a) = 2a^2$	10	9, 4
כלל מעבר וחישוב	(צ) $AN = MF$	11	10, 7
מ.ש.ל. א			
אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה	(צ) $BN = BM$	12	8, 5
חיבור קטעים שווים לקטעים שווים	$BN + NA = BM + MF$	13	12, 11
סכום קטעים	$BA = BF$	14	13
מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות $\triangle ABF$	(ז) $SA = SF$	15	14
משפט חפיפה צלע זווית צלע	$\triangle ADN \cong \triangle FEM$	17	16, 15, 11
מ.ש.ל. ב			
חילוק קטעים שווים בקטעים שווים	$\frac{BM}{MF} = \frac{BN}{NA}$	18	12, 11
משפט תאלס הפוך	AFPMN	19	18
חלקים מקטעים מקבילים	DEPMN	20	19
מ.ש.ל. ג			

נכתב ע"י עפר ילין

נתונים

1. $\triangle ABC$ חסום במעגל שמרכזו O.

2. BDC משיק למעגל בנקודה D

3. BFA משיק למעגל בנקודה F

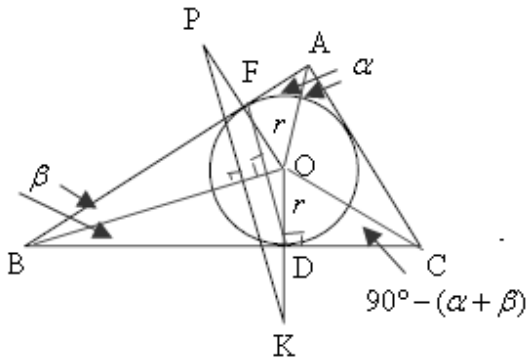
4. $OF = FP$ $OD = DK$

6. r - רדיוס מעגל חסום, $S_{ABC} = 2b$, $S_{BAC} = 2a$

צ"ל

א. $FD \perp BO$ ב. $BO \perp PK$

ג. שטח המשולש BOC.



נימוק	טענה	הסבר	
רדיוסים שווים במעגל	$OF = OD$	7	1
אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל, אז הם שווים זה לזה	$BF = BD$	8	3, 2
שני משולשים שווי שוקיים עם בסיס משותף	BFOD דלתון	9	8, 7
אלכסונים מאונכים זה לזה בדלתון	$FD \perp BO$	10	9
מ.ש.ל. א			
נתון	$OD = DK$	11	4
נתון	$OF = FP$	12	5
מחבר אמצעי שתי צלעות	FD קטע אמצעים $\triangle POK$	13	12, 11
קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית	FD \parallel PK	14	13
אם ישר מקביל לישר שני ומאונך לישר שלישי, אז גם הישר השני מאונך לישר השלישי	$BO \perp PK$	15	14, 10
מ.ש.ל. ב			

ולעבודת הטריגו

$SC = 180^\circ - (2a + 2b)$ (סכום זוויות ב- $\triangle ABC$ 180°)

$SOCD = 90^\circ - (a + b)$ (אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל)

$SOBC = b$ אז הישר המחבר בין הנקודה למרכז המעגל חוצה את הזווית בין המשיקים)

$SBOC = 180^\circ - (b + 90^\circ - (a + b)) = 90^\circ + a$ (סכום זוויות ב- $\triangle BOC$ 180°)

$SOBD = 90^\circ$ (רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)

$\triangle BOD$
 $\sin b = \frac{r}{BO} \rightarrow BO = \frac{r}{\sin b}$

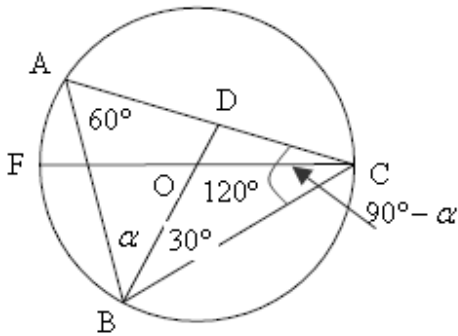
$$S_{\text{BOC}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{\sin b}\right)^2 \cdot \frac{\sin b \sin(90^\circ + a)}{\sin(90^\circ - (a + b))}$$

$$S_{\text{BOC}} = \frac{r^2 \cos a}{2 \sin b \cos(a + b)}$$

מ.ש.ל. ג

בדרך חלופית: על פי שטח משולש השווה למחצית מכפלת צלע בגובה נקבל את הביטוי

$$\frac{r^2 [\cot \beta + \tan(\alpha + \beta)]}{2}$$



א. הקשת \widehat{BC} ארוכה פי 2 מהקשת \widehat{B} (נתון)

CF הוא קוטר במעגל (נתון) ולכן $\widehat{B} = 180^\circ$,

כאשר $\widehat{BC} = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$ ולכן $\angle BAC = 60^\circ$

(זווית היקפית שווה לחצי הקשת עליה היא נשענת)

תשובה: $\angle BAC = 60^\circ$

ב. נמצא את היחס $\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}}$

לשני המשולשים גובה משותף לצלעות AD ו- AC (ה אנך מ- B לצלע AC , לא מצויר בסרטוט).

$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{0.5AD \cdot h}{0.5AC \cdot h} = \frac{AD}{AC}, \text{ לכן}$$

$\angle BOC = 120^\circ$ (זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת)

$\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$ (מול רדיוסים שווים מונחות זוויות שוות $\triangle OBC$)

$\angle DCB = 90^\circ - a$ (סכום זוויות $\triangle ABC = 180^\circ$)

$\triangle ABD$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - (60^\circ + a))} = \frac{AD}{\sin a} \rightarrow AB = \frac{AD \sin(60^\circ + a)}{\sin a}$$

$\triangle ABC$

$$\frac{AC}{\sin(30^\circ + a)} = \frac{AB}{\sin(90^\circ - a)}$$

$$AC = \frac{AD \sin(60^\circ + a) \sin(30^\circ + a)}{\sin a \cos a} = \frac{2AD \sin(60^\circ + a) \sin(30^\circ + a)}{\sin 2a}$$

$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{\frac{2AD \sin(60^\circ + a) \sin(30^\circ + a)}{\sin 2a}} = \frac{\sin 2a}{2 \sin(60^\circ + a) \sin(30^\circ + a)} \text{ ובהתאם יחס השטחים:}$$

$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{\sin 2a}{2 \sin(60^\circ + a) \sin(30^\circ + a)} \text{ תשובה:}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin a}{\sin(60^\circ + a)} \text{ ועל פי סעיף ב: } \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3} \text{ ג. נתון גם:}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\sin a}{\sin(60^\circ + a)}$$

$$2(\sin 60^\circ \cos a + \cos 60^\circ \sin a) = 3 \sin a \quad /: \sin a \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\tan a} + 1 = 3 \rightarrow \tan a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{a = 40.89^\circ} \leftarrow 0 < a < 90^\circ$$

תשובה: $a = 40.89^\circ$

$$a > 0, f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2 + 3a} - 1 \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

כיוון ש- $a > 0$ הרי שהמכנה $x^2 + 3a$ אינו מתאפס (חיובי לכל x) והפונקציה מוגדרת לכל x

תשובה: כל x

(2) נמצא תחומי עלייה וירידה

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 3a) - 2x(x^2 - a)}{(x^2 + 3a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 3a - x^2 + a)}{(x^2 + 3a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8ax}{(x^2 + 3a)^2}$$

הביטוי $8ax$ מתאפס עבור $x = 0$, וכיוון ש- $a > 0$ חיובי עבור $x > 0$ ושליילי עבור $x < 0$

תשובה: עלייה - $x > 0$, ירידה - $x < 0$

(3) בנקודת הפיתול הנגזרת השנייה מתאפסת,

כאשר אנו עוברים מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה, או להפך.

$$f''(x) = 8a \cdot \frac{(x^2 + 3a)^2 - 2x(x^2 + 3a) \cdot 2x}{(x^2 + 3a)^4}$$

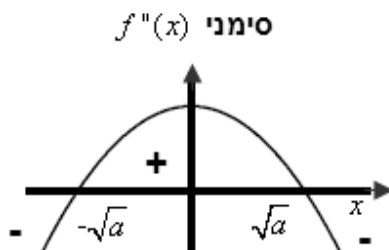
$$f''(x) = 8a \cdot (x^2 + 3a) \cdot \frac{(x^2 + 3a - 4x^2)}{(x^2 + 3a)^4}$$

$$f''(x) = \frac{8a \cdot (x^2 + 3a)(3a - 3x^2)}{(x^2 + 3a)^4}$$

$$0 = 3a - 3x^2 \quad /:3$$

$$x = \pm\sqrt{a} \quad \leftarrow a > 0$$

סימני הנגזרת השנייה, בהתאם לציור משמאל



כאשר $\frac{8a \cdot (x^2 + 3a)}{(x^2 + 3a)^4}$ ביטוי חיובי לכל x ,

ועבור $x = -\sqrt{a}, x = \sqrt{a}$ הפונקציה משנה תחומי קעירות ובהתאם אלו שיעורי ה- x של נקודות הפיתול.

תשובה: $x = -\sqrt{a}, x = \sqrt{a}$

(4) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x

$$f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2 + 3a} - 1$$

$$0 = \frac{x^2 - a}{x^2 + 3a} - 1 \quad / \cdot (x^2 + 3a)$$

$$0 = x^2 - a - x^2 - 3a$$

$$a = 0$$

אין חיתוך עם ציר ה- x כי $a > 0$.

$$f(0) = \frac{0^2 - a}{0^2 + 3a} - 1 = -1\frac{1}{3} \quad y \text{ עם ציר ה-}$$

תשובה: $(0, -1\frac{1}{3})$

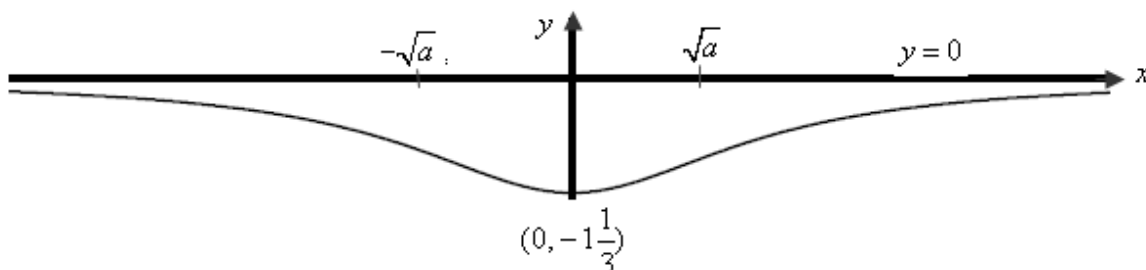
(5) נמצא אסימפטוטות של הפונקציה המאונכת לצירים

$$y = 0 \text{ לכן } y = 0 \text{ אסימפטוטה מאונכת לציר ה-} y, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - a}{x^2 + 3a} - 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{a}{x^2}}{1 + \frac{3a}{x^2}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

הפונקציה מוגדרת לכל x ואין אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x .

תשובה: $y = 0$

ב. סרטוט גרף הפונקציה עבור $a > 0$



$$a < 0, f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2 + 3a} - 1 \text{ (1) נתונה הפונקציה}$$

$$x^2 + 3a \neq 0 \rightarrow x^2 \neq -3a \rightarrow x \neq \pm\sqrt{-3a} \text{ במקרה זה הביטוי } x^2 + 3a \text{ יכול להתאפס:}$$

$$x \neq \pm\sqrt{-3a} \text{ תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור}$$

$$a < 0, f''(x) = \frac{8a \cdot (x^2 + 3a)(3a - 3x^2)}{(x^2 + 3a)^4} \text{ (2)}$$

כאשר $(x^2 + 3a)$ לא מתאפס בתחום ההגדרה, ו- $3a - 3x^2$ שלילי לכל x עבור $a < 0$.

תשובה: אין נקודות פיתול

נכתב ע"י עפר ילין

א. נתונות הפונקציות $g(x) = -\sqrt{x-4}$, $f(x) = \sqrt{-x-4}$

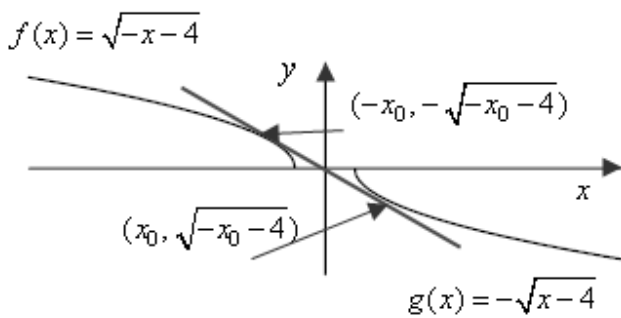
תחום ההגדרה של $f(x) = \sqrt{-x-4}$: $x \leq -4$ $\rightarrow -x-4 \geq 0 \rightarrow -x \geq 4$

תחום ההגדרה של $g(x) = -\sqrt{x-4}$: $x \geq 4$ $\rightarrow x-4 \geq 0$

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x-4}} \quad \text{ב. (1)}$$

לכן שיפוע המשיק בנקודה שבה $x = x_0$ הוא $m = \frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x-4}} \quad \text{כאשר יש למצוא את שיעור ה-} x \text{ עבורו } m = \frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$$



$$\frac{-1}{2\sqrt{x-4}} = \frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}}$$

$$\sqrt{-x_0-4} = \sqrt{x-4}$$

$$-x_0-4 = x-4$$

$$x = -x_0$$

$$g(-x_0) = -\sqrt{-x_0-4} \rightarrow (-x_0, -\sqrt{-x_0-4})$$

תשובה: שיעורי נקודת ההשקה של המשיק המשותף עם $g(x) = -\sqrt{x-4}$ הם: $(-x_0, -\sqrt{-x_0-4})$

(2) שיעורי נקודת ההשקה של המשיק המשותף עם $f(x) = \sqrt{-x-4}$ הם: $(x_0, \sqrt{-x_0-4})$

נשתמש בנוסחת שיפוע בין שתי נקודות:

$$\frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}} = \frac{-\sqrt{-x_0-4} - \sqrt{-x_0-4}}{-x_0 - x_0}$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{-x_0-4}} = \frac{-2\sqrt{-x_0-4}}{-2x_0}$$

$$-x_0 = 2(-x_0 - 4)$$

$$-x_0 = -2x_0 + 8$$

$$x_0 = 8 \rightarrow g(-8) = -\sqrt{-(-8)-4} = -2 \rightarrow (8, -2)$$

תשובה: $(8, -2)$

ג. הנוסחה לנפח גוף סיבוב היא $V = p \int_a^b f^2(x) dx$

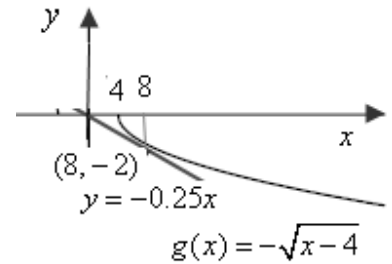
נמצא את משוואת המשיק העובר בנקדה $(8, -2)$ ושיפועו -0.25

$$m = \frac{-1}{2\sqrt{8-4}} = -0.25$$

$$y + 2 = -0.25(x - 8)$$

$$y = -0.25x$$

והמשיק עובר בראשית הצירים.



נחשב את V_1 - נפח הגוף שנוצר על ידי סיבוב השטח בין המשיק עם ציר ה- x (מנקודת ההשקה לראשית)

ונפחית ממנו את V_2 - נפח הגוף שנוצר על ידי סיבוב השטח בין $g(x) = -\sqrt{x-4}$ עם ציר ה- x ,

מנקודת ההשקה לנקודה $(4, 0)$

$$V_2 = p \int_4^8 [(-\sqrt{x-4})^2] dx =$$

$$V_2 = p \int_4^8 [x-4] dx =$$

$$V_2 = p \left(\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_4^8$$

$$V_2 = p \left(\left(\frac{8^2}{2} - 4 \cdot 8 \right) - \left(\frac{4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right) \right)$$

$$V_2 = 8p$$

$$V_1 = p \int_0^8 [(-0.25x)^2] dx =$$

$$V_1 = p \int_0^8 [0.0625x^2] dx =$$

$$V_1 = p \left(\frac{0.0625x^3}{3} \right) \Big|_0^8$$

$$V_1 = p \left(\left(\frac{0.0625 \cdot 8^3}{3} \right) - \left(\frac{0.0625 \cdot 0^3}{3} \right) \right)$$

$$V_1 = 10 \frac{2}{3} p$$

ובהתאם: $V = V_1 - V_2 = 10 \frac{2}{3} p - 8p = 2 \frac{2}{3} p$

תשובה: נפח גוף הסיבוב הוא $2 \frac{2}{3} p$

א. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \tan^2 x$ בתחום $-\frac{3p}{2} \leq x \leq \frac{3p}{2}$.

נשים לב לכך שהפונקציה זוגית ואי-שילית.

(1) נמצא את שיעורי ה- x שעבורם הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת, כלומר $x \neq \frac{p}{2} + pk$

ועבור $k = -2, -1, 0, 1$ נקבל ש- $f(x)$ אינה מוגדרת בתחום, עבור $x = -\frac{3p}{2}, x = -\frac{p}{2}, x = \frac{p}{2}, x = \frac{3p}{2}$

תשובה: $x = -\frac{3p}{2}, x = -\frac{p}{2}, x = \frac{p}{2}, x = \frac{3p}{2}$

(2) תשובה: האסימפטוטות אנכיות: $x = -\frac{3p}{2}, x = -\frac{p}{2}, x = \frac{p}{2}, x = \frac{3p}{2}$

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון

לא קיימות נקודות קצה, עקב תחום ההגדרה: $-\frac{3p}{2} < x < \frac{3p}{2}, x \neq -\frac{p}{2}, x \neq \frac{p}{2}$

$$f(x) = 2 \tan^2 x$$

$$f'(x) = \frac{4 \tan x}{\cos^2 x}$$

$$0 = \tan x \rightarrow x = pk \rightarrow k = -1, 0, 1 \rightarrow x = -p, 0, p$$

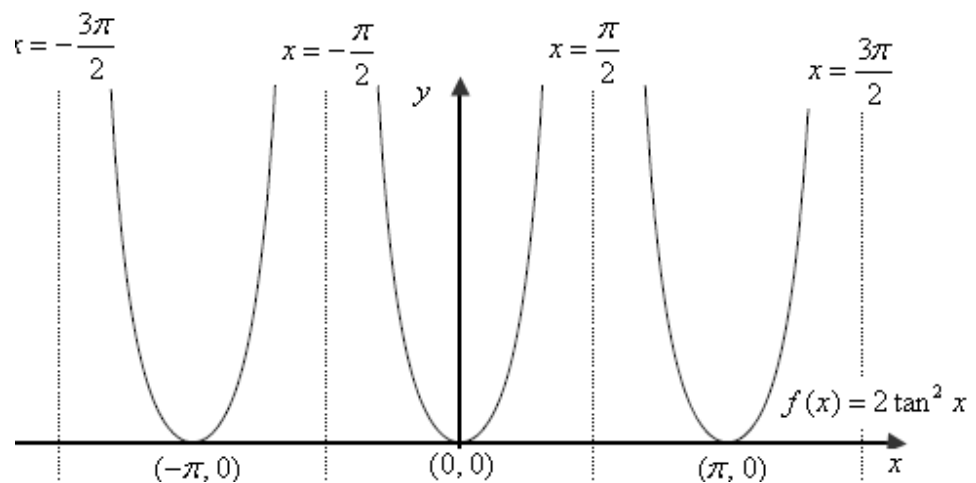
$$f(-p) = 0, f(0) = 0, f(p) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \rightarrow \text{Min}$$

השימוש בנגזרת שנייה לקביעת סימן הקיצון אפשרי, כי מכנה $f'(x)$ חיובי ו- $f'(x) = 0$

תשובה: $(-p, 0), (0, 0), (p, 0)$ מינימום

(4) הסקיצה המתאימה



נכתב ע"י עפר ילין

ב. (1) נמצא את פונקציית הנגזרת של הפונקציה $g(x) = \tan x - x$.

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$g'(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$g'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{g'(x) = \tan^2 x}$$

תשובה: $g'(x) = \tan^2 x$

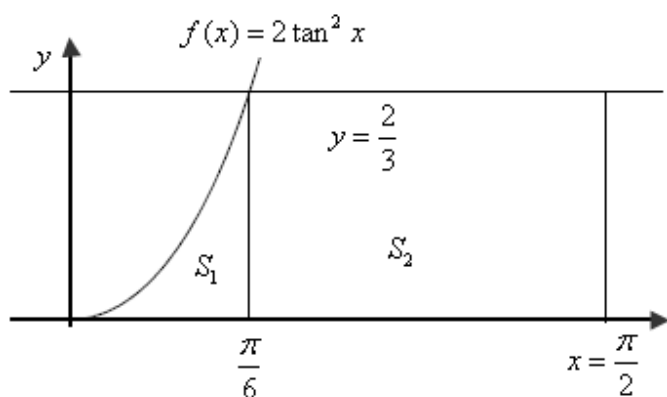
(2) נחשב את השטח המבוקש, תוך חלוקתו לשני שטחים כמתואר בציור.

$$2 \tan^2 x = \frac{2}{3} \rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{p}{6} + pk \quad x = -\frac{p}{6} + pk$$

ועבור $k=0$ נקבל שיעור ה- x של נקודת החיתוך, בתחום הנתון, הוא $\frac{p}{6}$.



$$S_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{p}{2} - \frac{p}{6} \right) = \frac{2p}{9}$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{p}{6}} (2 \tan^2 x - 0) dx$$

$$S_1 = 2 \left(\tan x - x \right) \Bigg|_0^{\frac{p}{6}}$$

$$S_1 = 2 \left(\left(\tan \frac{p}{6} - \frac{p}{6} \right) - (\tan 0 - \tan 0) \right)$$

$$S_1 = 2 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{p}{6} \right) - (0)$$

$$\boxed{S_1 = 0.1075}$$

$$S = \frac{2p}{9} + 0.1075 = 0.8056$$

תשובה: גודל השטח 0.8056 יח"ר