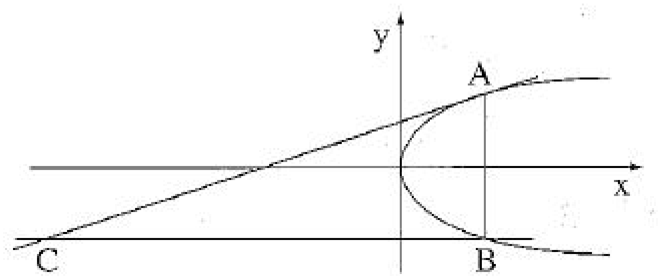
א. (1) נסמן $C(s,t)$ נקודה על המקום הגיאומטרי .



$y_B = y_C = t$, שכן BC מקביל לציר ה- x והמשוואה שלו $y = t$.

B על הפרבולה $y^2 = 2px$ ולכן שיעוריה $B(\frac{t^2}{2p}, t)$.

$x_A = x_B$, שכן AB מקביל לציר ה- y ,

ועקב הסימטריות של הפרבולה לציר ה- x , שיעורי הנקודה $A(\frac{t^2}{2p}, -t)$.

משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$: $yy_0 = p(x + x_0)$

ובהתאם השיפוע $m = \frac{p}{y_0}$, לכן: $m_{AC} = \frac{p}{-t}$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-t-t}{\frac{t^2}{2p} - s}$$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-2t}{\frac{t^2 - 2sp}{2p}}$$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-4tp}{t^2 - 2sp}$$

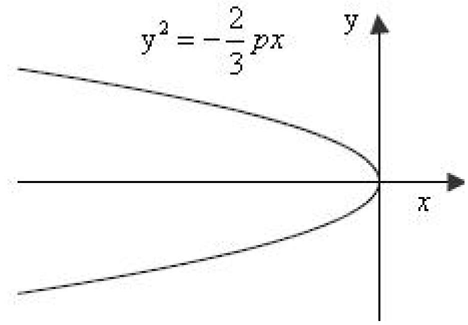
$$t^2 - 2sp = 4t^2$$

$$3t^2 = -2sp$$

$$\boxed{y^2 = -\frac{2}{3}px}$$

תשובה: $y^2 = -\frac{2}{3}px$

(2) הסרטוט המתאים:



ב. נתון כי שיעור ה- y של נקודה C, הנמצאת על המקום הגיאומטרי $y^2 = -\frac{2}{3}px$, הוא $y = -2p$.

על פי הסעיף הקודם שיעור ה- y בנקודת ההשקה הוא נגדי לשיעור ה- y בנקודה C

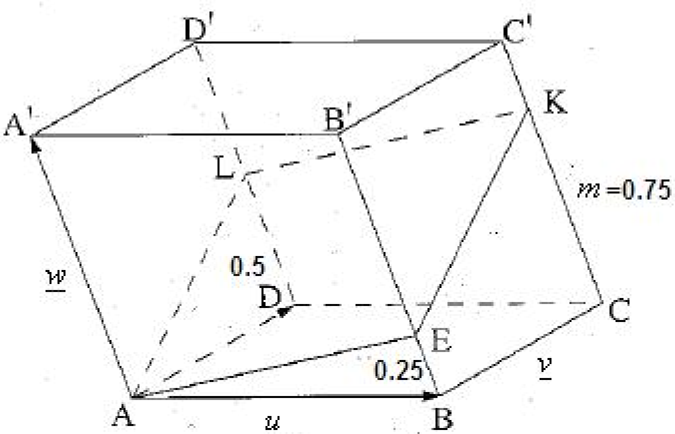
ולכן: $m_{AC} = \frac{p}{-t} = \frac{p}{-(-2p)} = 0.5$

השיפוע של המשיק חיובי, שכן המשיק עולה,

כאשר הוא שווה ל tan של הזווית בינו לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x

$$\tan \sim = 0.5$$
$$\sim = 26.565°$$

תשובה: הזווית שבין המשיק לפרבולה, CA, ובין ציר ה- x היא בת $26.565°$



א. נתון כי L **היא אמצע המקצוע** DD' **,**

ו- E **נמצאת על המקצוע** BB' **, כך ש-** $\frac{B'E}{BE}=3$ **.**

$\overrightarrow{CK}=m\,\overrightarrow{CC'}$ **,** $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$ **,** $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$ **,** $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

ובהתאם: $\overrightarrow{CK}=m\,\underline{w}$ **,** $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}\underline{w}$ **,** $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\underline{w}$

המקצוע AA' **מאונך למישור** AEL **, לכן**

יוצר זווית ישרה עם כל וקטור במישור AEL **.**

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AL}=0 \quad \rightarrow \underline{w}(\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})=0 \quad \rightarrow \underline{w}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}^2=0$$

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{EK}=0 \quad \rightarrow \underline{w}[\underline{v}+(m-\frac{1}{4})\underline{w}]=0 \quad \rightarrow \underline{w}\underline{v}+(m-\frac{1}{4})\underline{w}^2=0$$

$$\frac{1}{2}\underline{w}^2-(m-\frac{1}{4})\underline{w}^2=0 \quad /\div\underline{w}^2 \left(\underline{w}^2\neq 0\right)$$

$$\frac{1}{2}-m+\frac{1}{4}=0$$

$$\boxed{m=\frac{3}{4}}$$

תשובה: $m=\frac{3}{4}$

ב. ההצגה הפרמטרית של הישר CC' **היא** $\underline{x}=(4,5,8)+t(1,-1,2)$ **, כאשר הנקודה** $(2,-1,3)$ **נמצאת במישור** AEL **.**

משוואת המישור AEL **, שהנורמל שלו הוא** $\underline{x}=(1,-1,2)$ **היא** $® : x-y+2z+d=0$

נציב את שיעורי הנקודה $(2,-1,3)$ **ונקבל:** $2-(-1)+2\cdot 3+d=0 \quad \rightarrow d=-9$

ולכן משוואת המישור AEL **היא** $® : x-y+2z-9=0$

שיעורי הקדקוד C' **הם** $(x,y,0)$ **, כאשר נקודה טיפוסית על הישר** CC' **היא** $(4+t,5-t,8+2t)$

עבור $z_C=0$ **נקבל** $8+2t=0$ **ומכאן ש-** $t=-4$ **ושיעורי הקדקוד** C' **הם** $(0,9,0)$

נמצא את מרחק הקדקוד C' **מהמישור** $® : x-y+2z-9=0$

$$d=\frac{|-9-9|}{\sqrt{1^1+(-1)^2+2^2}}=\frac{18}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$$

הנקודה K **היא נקודת החיתוך של המקצוע** CC' **עם המישור** AEL **, כאשר מקצוע זה מאונך לו.**

כיוון ש $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$ **, הרי ש-** $\overrightarrow{CK}=3\overrightarrow{C'K}$ **ומכאן שהמרחק הקדקוד** C **מהמישור** AEL **הוא** $3\cdot 3\sqrt{6}=9\sqrt{6}$

תשובה: מרחק הקדקוד C **מהמישור** AEL **הוא** $9\sqrt{6}$**.**

א. z_1 , z_2 ו- z_3 **הם שלושה מספרים מרוכבים שונים הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.**

z_1 **ו-** z_2 **נמצאים ברביע הראשון, ו-** z_3 **נמצא ברביע השלישי.**

נסמן $z_1 = r_1(\cos\sim + i\sin\sim)$ **.**

כיוון ש- z_1 , z_2 **ברביע הראשון ונמצאים על ישר העובר בראשית הצירים, הרי שהארגומנטים שלהם שווים,**
אך הרדיוסים (הערכים המוחלטים) שונים, כי נתון שהם מספרים שונים. בהתאם: $z_2 = r_2(\cos\sim + i\sin\sim)$ **.**

z_3 **נמצא ברביע השלישי, על אותו ישר העובר בראשית הצירים, לכן** $z_3 = r_3(\cos(\sim +180°) + i\sin(\sim +180°))$ **,**
כאשר ייתכן כי הרדיוס של z_3 **שווה לזה של** z_1 **או** z_2 **.**

נעבד את ההצגה הטריגונומטרית של $\arg(z_3)$ **,**
תוך שימוש בזהויות $\sin(\sim +180°) = -\sin\sim , \cos(\sim +180°) = -\cos\sim$

$$(\cos(\sim +180°) + i\sin(\sim +180°)) =$$
$$(-\cos\sim - i\sin\sim) =$$
$$-(\cos\sim + i\sin\sim)$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1(\cos\sim + i\sin\sim) - (r_3(\cos(\sim +180°) + i\sin(\sim +180°))}{r_2(\cos\sim + i\sin\sim) - (r_3(\cos(\sim +180°) + i\sin(\sim +180°))}$$
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{(\cos\sim + i\sin\sim)(r_1 + r_3)}{(\cos\sim + i\sin\sim)(r_2 + r_3)}$$
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}$$

רדיוס הוא מספר ממשי, לכן המנה היא מספר ממשי.

תשובה: המנה $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ **היא מספר ממשי.**

ב. נתון גם כי z_1 **ו-** z_3 **נמצאים על מעגל היחידה, כלומר** $r_1 = r_3 = 1$ **, ו-** $\left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| = \frac{1}{2}$ **.**

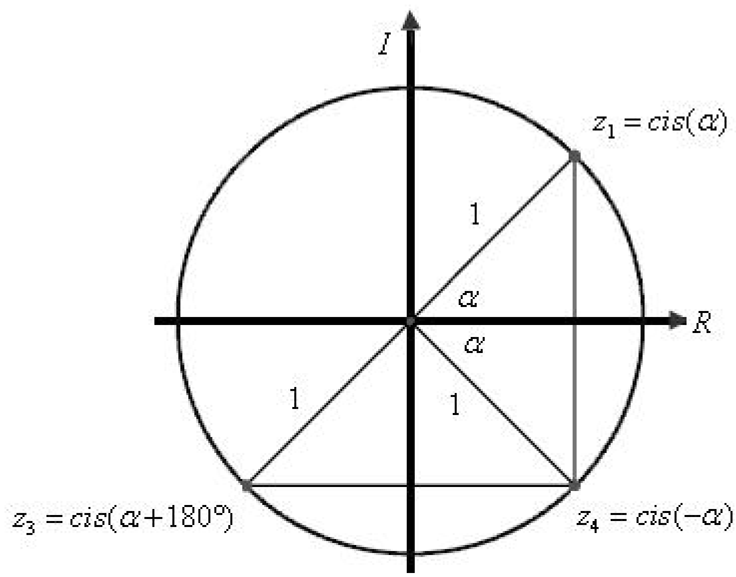
$$\frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1+1}{r_2 + 1} = \frac{1}{2}$$
$$4 = r_2 + 1$$
$$\boxed{r_2 = 3}$$
$$\boxed{|z_2| = 3}$$

תשובה: $r_2 = |z_2| = 3$

ג. z_4 **הוא הצמוד של** z_1 **, כלומר** $z_1 = cis(\sim) \quad \to z_4 = cis(-\sim)$

עפ"י סעיף ב הנתון על המצאות גם של z_3 **על מעגל היחידה, הרי ש-** $z_3 = cis(\sim + 180°)$

נצייר את המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_1 **,** z_3 **ו-** z_4 **.**



שטח המשולש הנוצר על ידי z_1 **,** z_4 **ראשית הצירים, שווה לחצי משטח המשולש המבוקש, כי** Oz_4 **הוא תיכון.**

לכן $S = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 2\sim}{2} = \sin 2\sim$

תשובה: שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_1 **,** z_3 **ו-** z_4 **הוא** $\sin 2\sim$ **יח"ר.**

נתונות שלוש פונקציות, I , II , III :

$$\text{I.}\quad y=-2x+4 \qquad\qquad \text{II.}\quad y=\ell nx \qquad\qquad \text{III.}\quad y=\ell nx+2x-4$$

א. הפונקציה $y=-2x+4$ I. **מוגדרת לכל** x**, יורדת לכל** x **וכמובן אין לה אסימפטוטות המקבילות לצירים.**

הפונקציה $y=\ell nx$ II. **מוגדרת עבור** $x>0$ **וגם הפונקציה** $y=\ell nx+2x-4$ III. **מוגדרת עבור** $x>0$ **.**

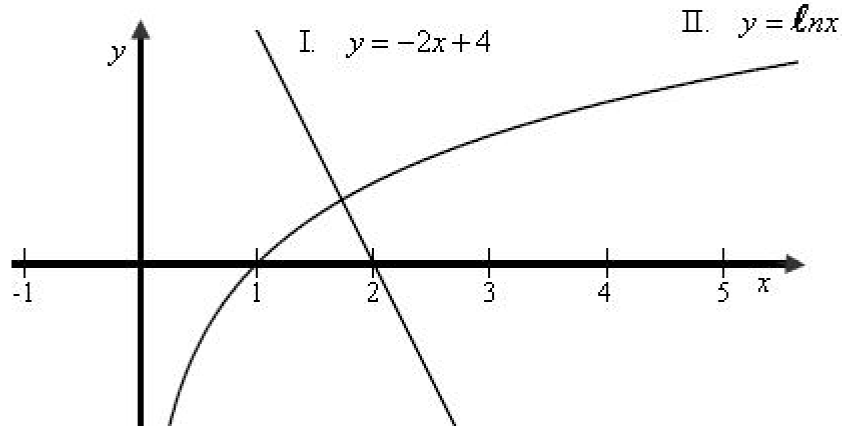
$\lim_{x\to 0^+}\ell nx=-\infty$ **ולכן** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית, כאשר** $\lim_{x\to\infty}\ell nx=\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית.**

ב. (1) נגזרת הפונקציה $y=\ell nx$ II. **היא** $y'=\frac{1}{x}$ **, שהיא חיובית בתחום ההגדרה** $x>0$ **ולכן הפונקציה עולה,**

והנגזרת השנייה $y''=-\frac{1}{x^2}$ **שלילית ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה בתחום ההגדרה** $x>0$ **.**

הפונקציה חותכת את הצירים בנקודות $(1,0)$, $(0,1)$ **.**

הפונקציה $y=-2x+4$ I. **היא פונקציה קווית יורדת החותכת את הצירים בנקודות** $(2,0)$, $(0,4)$



(2) נקודת החיתוך בין הגרפים של הפונקציות I **ו-** II **חייבת להימצא בתחום** $1<x<2$ **,**

כי עבור $x=1$ **ערך הפונקציה** I **גדול מזה של** II **ועבור** $x=2$ **ערך הפונקציה** I **קטן מזה של** II **,**

כאשר פונקציה אחת יורדת והשנייה עולה,

ובהתאם בתחום $1<x<2$ **ימצא שיעור ה-** x **עבורו ערכי הפונקציות שווים.**

ג. (1) נגזרת הפונקציה $y=\ell nx+2x-4$ III. **היא** $y'=\frac{1}{x}+2$ **, שהיא חיובית בתחום ההגדרה** $x>0$

ולכן הפונקציה עולה והנגזרת השנייה $y''=-\frac{1}{x^2}$ **שלילית ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה**

בתחום ההגדרה $x>0$ **.**

תשובה: ירידה – אף x **, עלייה** $x>0$

(2) נשים לב לכך ש: $y=\ell nx+2x-4=\ell nx-(2x+4)$ III. **,**

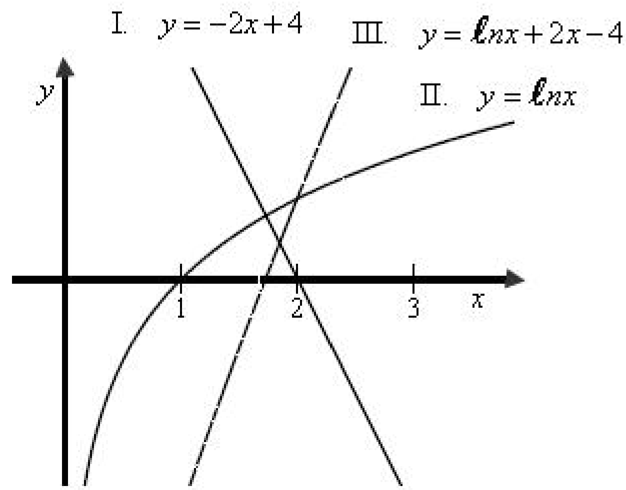
כלומר הפונקציה III **היא ההפרש בין הפונקציות** II **ו-** I **וכאשר ערכיהן שווים (בתחום** $1<x<2$**)**

ערך הפונקציה III **יהיה שווה ל-** 0 **והיא תחתוך את ציר ה-** x **.**

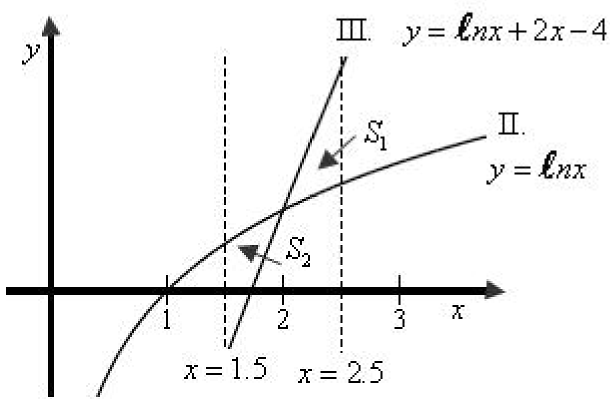
תשובה :נקודת החיתוך של גרף הפונקציה III **עם ציר ה-** x **תהייה בתחום** $1<x<2$

(3) נעדכן את הסקיצה

(הערה – מטעמי נוחות של ציור עם המחשב, לא הובעה יפה הקעירות כלפי מטה של $y=\ell nx+2x-4$ III. **)**



ד. נמצא את שיעור ה- x **של נקודת החיתוך בין הפונקציות:**



$$\ell nx+2x-4=\ell nx$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

$$S_1=\int_2^{2.5}(\ell nx+2x-4-\ell nx)\,dx$$

$$S_1=\int_2^{2.5}(2x-4)\,dx$$

$$S_1=\frac{2x^2}{2}-4x\,\Big]_2^{2.5}=$$

$$S_1=(2.5^2-4\cdot 2.5)-(2^2-4\cdot 2)=$$

$$S_1=-3.75-(-4)$$

$$\boxed{S_1=0.25}$$

$$S=S_1+S_2=0.25+0.25=\boxed{0.5}$$

תשובה: גודל השטח 0.5 **יח"ר**

$$S_2 = \int_{1.5}^{2.} (\ell nx - (\ell nx + 2x - 4))\, dx$$

$$S_2 = \int_{1.5}^{2} (-2x + 4)\, dx$$

$$S_2 = -\frac{2x^2}{2} + 4x \Big]_{1.5}^{2} =$$

$$S_2 = (-2^2 + 4 \cdot 2) - (-1.5^2 + 4 \cdot 1.5) =$$

$$S_2 = 4 - 3.75$$

$$\boxed{S_2 = 0.25}$$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(1+x)e^{-x}$, המוגדרת לכל x .

$$f'(x)=e^{-x}-(1+x)e^{-x}$$
$$f'(x)=e^{-x}(1-1-x)$$
$$\boxed{f'(x)=-xe^{-x}}$$

תשובה: הוכַח.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון:

נגזרת הפונקציה מתאפסת רק עבור $x=0$, כי e^{-x} חיובי לכל x , כאשר $f(0)=(1+0)e^{-0}=1$.

$$f'(-1)=-(-1)\cdot(+)>0,\quad f'(1)=-1\cdot(+)<0$$

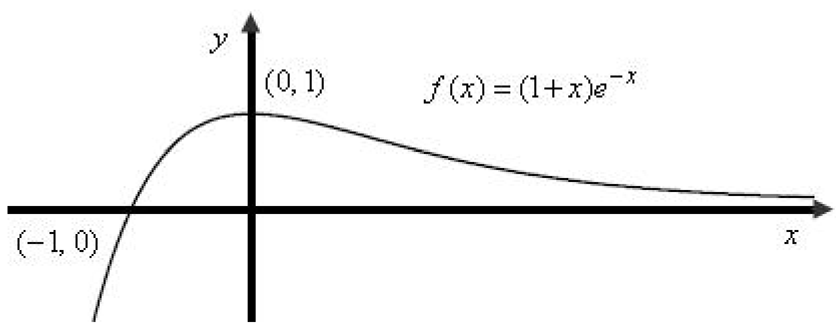
לכן, הפונקציה עוברת מעליה לירידה והנקודה $(0,1)$ נקודת מקסימום (בחיתוך עם ציר ה- y).

תשובה: $(0,1)$ נקודת מקסימום.

ג. $f(x)=(1+x)e^{-x}$ מקבלת ערך 0 רק בנקודה $(-1,0)$ שהיא נקודת החיתוך עם ציר ה- x .

תשובה: $(-1,0)$, $(0,1)$

ד. נשים לב כי $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)e^{-x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)e^{-x}=0$ ומכאן שהקרן החיובית של ציר ה- x אסימפטוטה אופקית.



ה. נראה כי עבור $a>0$ **מתקיים** $\int_{-1}^{a} f(x)dx<e$ **,**

כאשר ע"פ סעיף א: $\int -xe^{-x}dx=(1+x)e^{-x}+c$

$$\int_{-1}^{a} f(x)dx=\int_{-1}^{a}(1+x)e^{-x}dx=\int_{-1}^{a}(e^{-x}+xe^{-x})\,dx=-e^{-x}-(1+x)e^{-x}\Big]_{-1}^{a}=-e^{-x}-e^{-x}-xe^{-x}\Big]_{-1}^{a}=-2e^{-x}-xe^{-x}\Big]_{-1}^{a}$$

$$\int_{-1}^{a} f(x)dx=(e^{-x})(-2-x)\Big]_{-1}^{a}$$

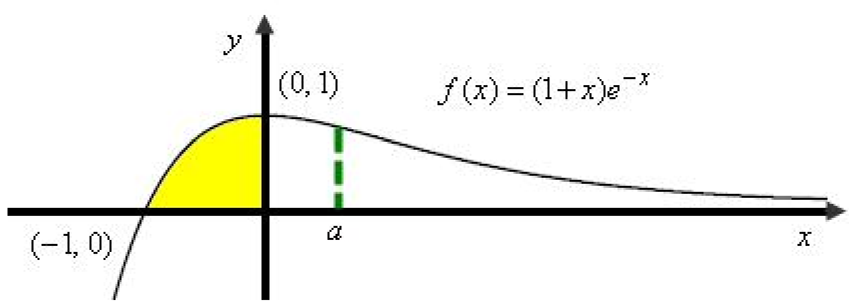
$$\int_{-1}^{a} f(x)dx=e^{-a}(-2-a)-e^{-(-1)}(-2-(-1))$$

$$\int_{-1}^{a} f(x)dx=\underbrace{e^{-a}(-2-a)}_{<0}+e<e$$

הסבר: כיוון ש- $(-2-a)<0$ **עבור** $a>0$ **, הרי ש-** $e^{-a}(-2-a)$ **שלילי אף הוא ולכן** $\int_{-1}^{a} f(x)dx<e$

תשובה: הוכַח

ז. (1) נחשב את השטח המבוקש – הצבוע בצהוב.



$$S=\int_{-1}^{0} f(x)dx=(e^{-x})(-2-x)\Big]_{-1}^{0}$$

$$S=(e^{-0}(-2-0))-(e^{-(-1)}(-2-(-1)))$$

$$S=-2+e$$

תשובה: גודל השטח $e-2$ **יח"ר**

(2) כיוון שגרף הפונקציה $f(x)=(1+x)e^{-x}$ **מעל לציר ה-** x **עבור** $x>-1$ **,**

הרי שלחשב את האינטגרל המסוים $\int_{-1}^{a} f(x)dx<e$ **, זה כמו לחבר שני שטחים:**

השטח שחשבנו בסעיף (1) $e-2$ **יח"ר, ועוד שטח שבהכרח גודלו הוא חיובי (בין ציר ה-** y **לישר** $x=a$ **),**

כאשר סכום השטחים יהיה גדול מ- $e-2$ **.**

לכן, $\int_{-1}^{a} f(x)dx>e-2$ **, עבור** $a>0$ **.**