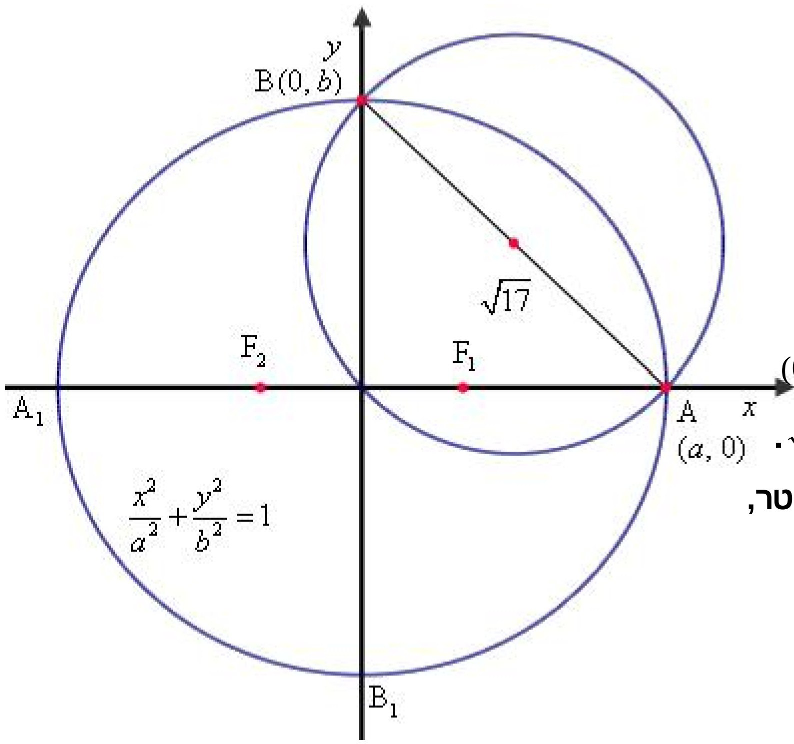


א. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **.**

כאשר המוקד $F_1(c,0)$ **הוא אמצע הקטע** AF_2 **.**

כיוון ש: $A(a,0)$, $F_2(-c,0)$ **, הרי ש-** $\frac{a+(-c)}{2}=c$

ונקבל ש- $a=3c$ **.**

אורך קוטר המעגל, העובר דרך מרכז האליפסה $(0,0)$

והקדקודים (לשם הדוגמה) $A(a,0), B(0,b)$ **הוא** $\sqrt{17}$ **.**

כיוון שהצירים מאונכים זה לזה, הרי ש- AB **הוא הקוטר,**

ו- $a^2+b^2=17$ **.**

כמו כן, באליפסה מתקיים $a^2=b^2+c^2$ **.**

$$\begin{cases} a=3c \quad \rightarrow c^2=\frac{a^2}{9} \\ a^2+b^2=17 \quad \rightarrow b^2=17-a^2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

$$a^2=17-a^2+\frac{a^2}{9} \quad \rightarrow \frac{17}{9}a^2=17 \quad \rightarrow a=3 \leftarrow a>0$$

$$a=3 \rightarrow c=1,\ b=\sqrt{8}$$

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ **.**

ב. מרכז המעגל בציור שבסעיף א הוא $(\frac{0+3}{2},\frac{\sqrt{8}+0}{2})$ **כלומר** $(1.5,\sqrt{2})$**.**

עקב הסימטריה של האליפסה לציר ה- x **ולציר ה-** y **,**

שיעורי שאר קדקודי בסיס הפירמידה יהיו: $(-1.5,\sqrt{2}), (-1.5,-\sqrt{2}), (1.5,-\sqrt{2})$ **,**

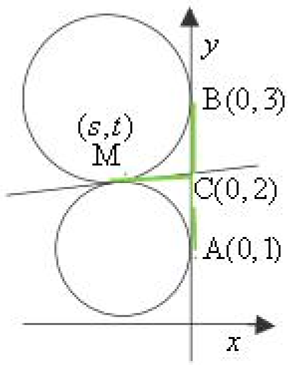
ושטח בסיס הפירמידה $3\cdot2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$**.**

משוואת מישור בסיס הפירמידה, הנמצא במישור $[x,y]$ **היא** $z=0$ **.**

ולכן אורך הגובה מהקדקוד $(0,3,4)$ **הוא** 4**.**

נפח הפירמידה: $V=\frac{6\sqrt{2}\cdot4}{3}=8\sqrt{2}$

תשובה: נפח הפירמידה הוא $8\sqrt{2}$**.**



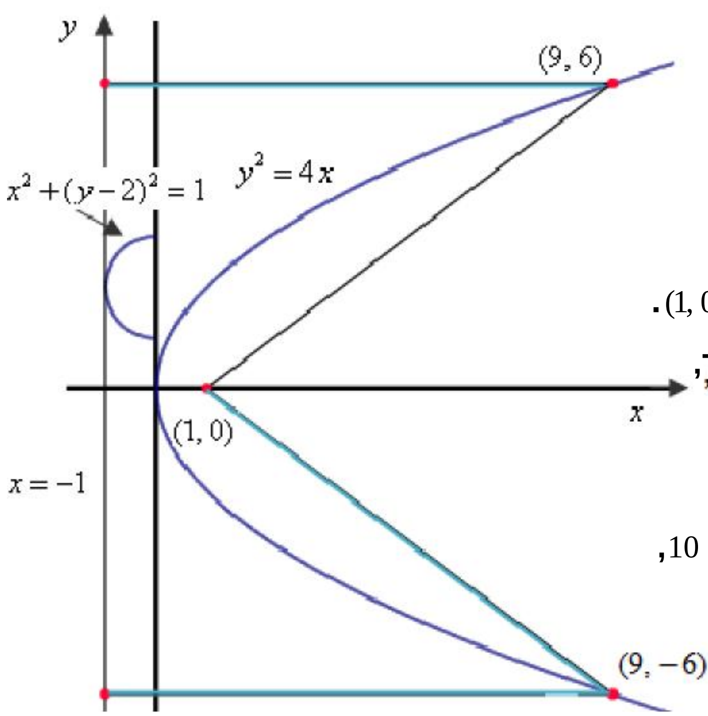
א. מהנקודה C **יוצאים שני משיקים לכל אחד מהמעגלים.**
על פי המשפט "אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל
אז אורכיהם שווים" מתקבל ש $CB = CM$ **, וגם** $CA = CM$
ולכן על פי כלל המעבר $CB = CM = CA$ **, או** $MC = \frac{1}{2}AB$ **.**

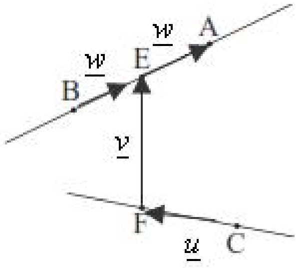
תשובה: הוכַח.

ב. (1) הנקודה C **היא אמצע הקטע** AB **ובהתאם שיעוריה** $(0,2)$ **.**
נסמן $M(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי, הממוקם ברביע השני.**
המשותף לכל הנקודות $M(s,t)$ **הוא שמרחקן מנקודה** $C(0,2)$ **,**
שווה ל- $\frac{1}{2}AB$ **כלומר ל-** 1**.**

משוואת המקום הגיאומטרי היא $\sqrt{(s-0)^2+(t-2)^2} = 1$ **,**
כלומר $x^2+(y-2)^2 = 1$ **, משוואה של מעגל.**
נתון כי המרכזים ברביע השני,
ולכן גם נקודת ההשקה ביניהם $M(s,t)$ **ברביע השני, בו** $x<0$
תשובה: המקום הגיאומטרי הוא קשת המעגל $x^2+(y-2)^2 = 1$ **,** $x<0$ **.**
(2) תשובה: קשת המעגל (ללא נקודות החיתוך עם ציר ה- y **), ברביע השני.**

ג. משוואת המדריך של הפרבולה $y^2 = 2px$ **היא** $x = -\frac{p}{2}$ **.**
כיוון שהנקודות שעל ציר ה- y **אינן על המקום הגיאומטרי,**
הרי שהישר $x=0$ **לא יכול להיות משיק לחצי המעגל,**
ולכן הישר $x=-1$ **הוא המשיק, ומכאן ש-** $-\frac{p}{2} = -1$ **ו-** $p=2$
ומשוואת הפרבולה הקנונית היא $y^2 = 4x$ **, המוקד שלה הוא** $(1,0)$ **.**
מרחק נקודה שעל הפרבולה מהמוקד שווה למרחקה מהמדריך,
לכן $x-(-1) = 10$ **ומכאן ש-** $x=9$ **.**
נציב $x=9$ **במשוואת הפרבולה** $y^2=4x$ **ונקבל** $y=\pm 6$
תשובה: שיעורי הנקודות על הפרבולה, שמרחקן מהמוקד הוא 10**,**
הם : $(9,6)$ **ו-** $(9,-6)$ **.**





א. שני הישרים שבציור מצטלבים.

$\boxed{\overrightarrow{CF} = \underline{u}}$ $\quad |\underline{u}| = \sqrt{7} \quad \underline{u}^2 = 7$

$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{v}}$ $\quad |\underline{v}| = \sqrt{13} \quad \underline{v}^2 = 13$

$\boxed{\overrightarrow{AA'} = \underline{w}}$ $\quad |\underline{w}| = \sqrt{5} \quad \underline{w}^2 = 5$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \quad \leftarrow \underline{u} \perp \underline{v}, \underline{v} \perp \underline{w}$.

$\underline{u} \cdot \underline{w} = |\underline{u}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos\sphericalangle(\underline{u}, \underline{w})$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{35}}{10}$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = 3.5$

$$\cos\sphericalangle ABC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CB}|}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = -2\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CB} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -2\underline{w}(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -2\underline{u}\underline{w} + 2\underline{w}^2 = -2 \cdot 3.5 + 2 \cdot 5 = 3 \quad \leftarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |-2\underline{w}| = 2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = |\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}| = \sqrt{\underline{u}^2 + \underline{v}^2 + \underline{w}^2 - 2\underline{u}\underline{w}} = \sqrt{7 + 13 + 5 - 2 \cdot 3.5} = \sqrt{18}$$

$$\cos\sphericalangle ABC = \frac{3}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{18}}$$

$$\boxed{\sphericalangle ABC = 80.9°}$$

תשובה: $\sphericalangle ABC = 80.9°$

ב. נתון גם: $B(2,6,3)$, $A(0,2,3)$.

נמצא את וקטור הכיוון של AB **שיהיה הנורמל של המישור** ®, **המאונך לישר** AB.

$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} = \underline{x} = (2,4,0)$

בהתאם משוואת המישור היא $2x + 4y + d = 0$ **, נציב את שיעורי הנקודה** $B(2,6,3)$

ונקבל $2 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + d = 0$ **ומכאן ש-** $d = -28$ **ו-** $2x + 4y - 28 = 0$ **ולאחר צמצום** $x + 2y - 14 = 0$.

תשובה: משוואת המישור ® **היא** $x + 2y - 14 = 0$.

ג. נתון גם: $B(2,6,3)$ **,** $A(0,2,3)$ **.**

יש למצוא את הזווית שבין הישר (המשופע) BC **למישור ®.**

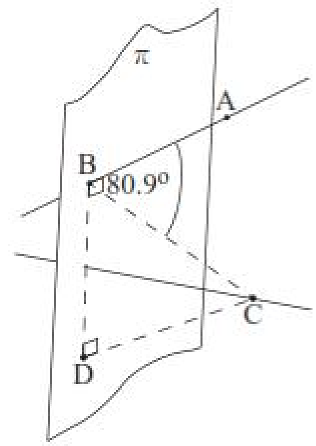
הזווית $\sphericalangle ABC = 80.9°$ **שמצאנו בסעיף א', היא הזווית שבין** BC **לישר** AB **.**

כיוון שהישר AB **מאונך למישור ®, הרי שהזווית המבוקשת משלימה ל-** $90°$ **.**

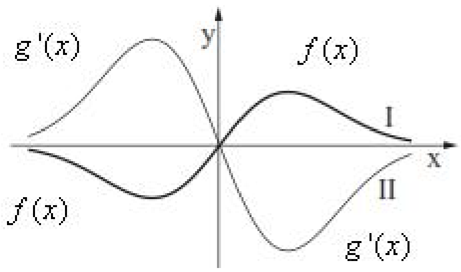
$$90° - 80.9° = 9.1°$$

תשובה: הזווית שבין הישר (המשופע) BC **למישור ® היא בת** $9.1°$ **.**

בפתרונות של משרד החינוך הובא האיור הבא, להמחשה.



א. נתון כי $g'(x)=-2f(x)$ **, כלומר הפונקציה** $g'(x)$ **היא שיקוף של** $f(x)$ **כולל הכפלה פי** (-2) **של ערכי** $f(x)$ **.**
מכאן שגרף I **מתאים ל-** $f(x)$ **וגרף** II **מתאים ל-** $g(x)$ **שערכיה, על פי התבוננות בגרפים, גדולים בערכם המוחלט מערכי** $f(x)$ **(למעט בראשית הצירים).**



תשובה: גרף I **מתאים ל-** $f(x)$ **וגרף** II **מתאים ל-** $g'(x)$ **.**

ב. נתון כי $g'(x)=-2xe^{-x^2}$ **ו-** $g(0.5)=\frac{1}{e^{0.25}}$

$$f(x)=-0.5g'(x)=-0.5\cdot(-2xe^{-x^2})$$

$$\boxed{f(x)=xe^{-x^2}}$$

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int(-2xe^{-x^2})\,dx=\int(e^{-x^2}\cdot(-2x))\,dx$$

נשים לב שהכופל הימני בתוך האינטגרל, הוא נגזרת של הכופל השמאלי,

ולכן האינטגרל מיידי : $g(x)=e^{-x^2}+c$ **, ועתה נציב את שיעורי הנקודה** $(0.5,\frac{1}{e^{0.25}})$

$$\frac{1}{e^{0.25}}=e^{-0.5^2}+c$$

$$e^{-0.25}=e^{-0.25}+c \quad \rightarrow c=0$$

$$\boxed{g(x)=e^{-x^2}}$$

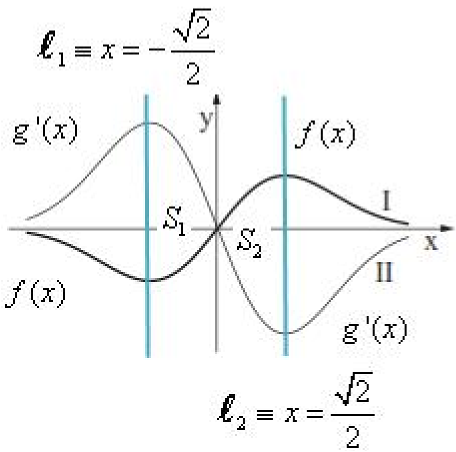
נמצא לאילו ערכי x **מתקיים** $f(x)>g(x)$

$$xe^{-x^2}>e^{-x^2} \quad /:e^{-x^2}>0$$

$$\boxed{x>1}$$

תשובה: $x>1$ **.**

ג. נמצא את שיעורי נקודת המינימום והמקסימום של $f(x)$ **.**



$$f(x)=xe^{-x^2}$$

$$f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}$$

$$f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$0=1-2x^2 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ועל פי הציור הנתון, משוואת הישר ℓ_1 **היא** $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **ו משוואת הישר** ℓ_2 **היא** $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$**.**

תשובה: $\ell_2 \equiv x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\ell_1 \equiv x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ד. שתי הפונקציות $f(x), g'(x)$ הן אי זוגיות, ושונות רק בסימן שלהן בין S_1 ל- S_2 .

$f'(-x)=(-x)e^{-(-x)^2}=-xe^{-x^2}=-f(x)$ **ו-** $g'(-x)=-2f(-x)=-2(-f(x))=2f(x)=-g'(x)$.

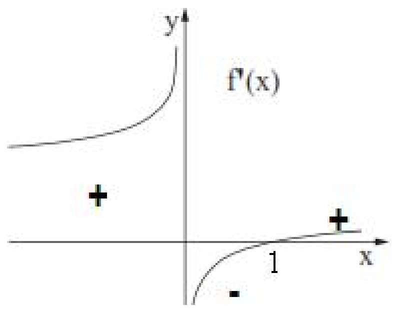
לכן השטחים שבין כל אחת מהפונקציות, מעל או מתחת לציר ה– x ובין ציר ה- y לשני הישרים – שווה.

מכאן ש- $S_1=S_2$.

תשובה: $\frac{S_1}{S_2}=1$.

א. בציור מוצג גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{2\cdot\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}$

(1) כאשר, הפונקציה הקדומה $f(x)$ **מוגדרת לכל** x.



נמצא את תחומי החיוביות/ שליליות של $f'(x)=\frac{2\cdot\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}$.

$$0=\frac{2\cdot\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}$$
$$0=2\cdot\sqrt[3]{x}-2$$
$$\sqrt[3]{x}=1$$
$$x=1$$

ובהתאם, על פי הציור הנתון $f'(x)>0$ **עבור** $x>1$ **או** $x<0$ **ובתחומים אלו הפונקציה עולה,**

ו- $f'(x)<0$ **עבור** $0<x<1$ **ובתחום זה הפונקציה יורדת.**

תשובה: עלייה: $x>1$ **או** $x<0$ **, ירידה:** $0<x<1$.

(2) $f'(x)$ **עולה, על פי הציור בתחומים** $x>0$ **או** $x<0$ **,**

ולכן הנגזרת שלה, $f''(x)$ **חיובית בתחומים אלו ו**

מכאן שהפונקציה $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה (** $\cup$ **) בתחומים אלו.**

כאשר $x=0$ **הנגזרת הראשונה והשנייה אינה מוגדרת,**

ולכן לא ניתן לדבר על קעירות עבור $x=0$ **,**

והסקיצה המתאימה צריכה לבטא, באמצעות "שפיץ", את אי קיום הנגזרת הראשונה.

תשובה: קעירות כלפי מעלה: $x>0$ **או** $x<0$ **, קעירות כלפי מטה – אף** x **).**

ב. נתון כי הישר $y=-1$ **משיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה.**

זו הנקודה שבה $x=1$ **כי בה הפונקציה עוברת מירידה לעלייה.**

$$f'(x)=\frac{2\cdot\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}=2-\frac{2}{x^{1/3}}=2-2x^{-1/3}$$
$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2-2x^{-1/3})\,dx=2x-\frac{2x^{2/3}}{2/3}+c$$
$$f(x)=2x-3x^{2/3}+c$$

עתה נציב את שיעורי הנקודה $(1,-1)$

$$-1=2\cdot1-3\cdot1^{2/3}+c\quad\rightarrow c=0$$
$$\boxed{f(x)=2x-3\sqrt[3]{x^2}}$$

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

$$f(0)=2\cdot 0-3\cdot\sqrt[3]{0^2}=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$0=2x-3\sqrt[3]{x^2}$$

$$0=x(2-3x^{-1/3})$$

$$x=0 \quad \rightarrow (0,0)$$

$$2=3x^{-1/3}$$

$$x^{1/3}=1.5$$

$$x=3.375 \quad \rightarrow \boxed{(3.375,0)}$$

תשובה: $(0,0)$ **,** $(3.375,0)$ **.**

ג. גרף III **עשוי לתאר את הפונקציה** $f(x)$ **.**

הפונקציה מוגדרת לכל x **, לפונקציה נקודת מינימום (עבור** $x=1$ **).**

תחומי עלייה וירידה מתאימים לפתרון תת סעיף א (1), ותחומי הקעירות כלפי מעלה לתת סעיף א(2),

ובנקודה שבה $x=0$ **ניתן לראות ב"שפיץ" את העובדה שהנגזרת *לא* מוגדרת בנקודה.**

כמו כן נקודות החיתוך עם הצירים תואמות את הפתרון של סעיף ב.