א. סכום ארבעת האיברים הראשונים בסדרה a_1 , a_2 , a_3 , a_4 **הוא** 20 **.**

$$20=\frac{4\cdot(2a_1+3d)}{2}$$

$$\boxed{2a_1+3d=10}$$

הסדרה החשבונית עולה, לכן $d>0$ **.**

שלושת האיברים a_1 , a_2 , a_4 **הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית.**

$$(a_2)^2=a_1\cdot a_4$$

$$(a_1+d)^2=a_1\cdot(a_1+3d)$$

$$a_1^2+2a_1d+d^2=a_1^2+3a_1d \text{ .}$$

$$d^2=a_1d \quad /:d>0$$

$$\boxed{a_1=d}$$

נציב במשוואה הראשונה שמצאנו:

$$2d+3d=10$$

$$5d=10 \quad /:5$$

$$\boxed{d=2}$$

תשובה: הוכַח , והפרש הסדרה החשבונית הוא 2 **.**

ב. משתי הסדרות בנו סדרה שלישית, שהיא גם סדרה הנדסית אינסופית יורדת (נסמנה b_n**).**

$\frac{a_2}{a_3-a_1}$ **הוא האיבר הראשון בסדרה החדשה, כלומר** $0<q<1$ **.**

על פי סעיף א, $a_1=2, a_2=4, a_3=6$ **, לכן האיבר הראשון בסדרה החדשה הוא** $b_1=\frac{4}{6-2}=1$.

סכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 2 **.**

$$2=\frac{1}{1-q}$$

$$1-q=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{q=0.5}$$

נמצא את סכום 6 **האיברים הראשונים בסדרה זו.**

$$S_6^b=\frac{1\cdot(0.5^6-1)}{0.5-1}=1\frac{31}{32}$$

תשובה: הסכום הוא $1\frac{31}{32}$**.**

א. בסיס הפירמידה הישרה SABCD **הוא ריבוע** ABCD .

SO **, גובה הפירמידה יורד למפגש אלכסוני הריבוע, שהוא מרכז המעגל החוסם.**

נסמן את אורך צלע הריבוע ב- x **, ולכן על פי הנתון** $SO = x$ **.**

$OF = 0.5x$ **כי הוא קטע אמצעים ב-** ΔCDB **.**

$\sphericalangle SFO$ **היא הזווית שבין** SF **לבסיס הפירמידה, כי** OF **הוא ההיטל של גובה הפאה לבסיס.**

$\underline{\Delta SKO}$

$$\cos\sphericalangle SKO = \frac{KO}{SK}$$

$$\cos 68° = \frac{KO}{16} \quad / \cdot 16$$

$$16\cos 68° = KO$$

תשובה: הזווית שבין SF **לבסיס הפירמידה היא בת** $63.43°$ **.**

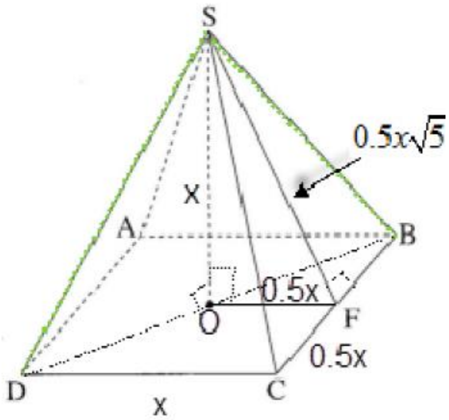
ב. SF **הוא גובה הפאה** SCD **, שהיא שוות שוקיים, ולכן גם חוצה זווית הראש.**

ΔSOF **לפי משפט פיתגורס.**

$$(SF)^2 = (SO) + (OF)^2$$

$$(SF)^2 = x^2 + (0.5x)^2$$

$$\boxed{SF = 0.5x\sqrt{5}}$$



$\underline{\Delta SCF}$

$$\tan\sphericalangle CSF = \frac{CF}{SF} = \frac{0.5x}{0.5x\sqrt{5}}$$

$$\sphericalangle CSF = 24.09°$$

$$\sphericalangle CSB = 2 \cdot 24.09°° = 48.19°$$

תשובה: $\sphericalangle CSB = 48.19°$

ג. נפח הפירמידה הוא 1125 **סמ"ק.**

$$1125 = \frac{x^2 \cdot x}{3} \quad \rightarrow \boxed{x = 15cm}$$

ΔSDB **שווה שוקיים (המקצועות הצדדיים שווים זה לזה),**

כאשר אורך בסיסו הוא אלכסון הבסיס $15\sqrt{2}$ **ס"מ (משפט פיתגורס ב-** ΔCDB **) וגובהו** 15 **ס"מ** $= SO$ **.**

$$S_{\Delta SDB} = \frac{15\sqrt{2} \cdot 15}{2} = 159.1$$ **סמ"ר**

תשובה: שטח ΔSDB **הוא** 159.1 **סמ"ר .**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos(2x)$ **בתחום** $0\le x\le 2®$ **.**

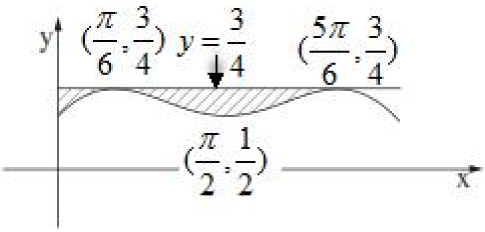
(1) נמצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות המקסימום המוחלט שלה.

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot(-2)$$
$$f'(x)=\cos x-\sin(2x)$$
$$f'(x)=\cos x-2\sin x\cos x$$
$$0=\cos x(1-2\sin x)$$
$$\cos x=0 \qquad \sin x=0.5=\sin\frac{®}{6}$$
$$x=\frac{®}{2}+2®k \quad x=\frac{®}{6}+2®k \quad x=\frac{5®}{6}+2®k$$
$$x=\frac{®}{2}\to(\frac{®}{2},\frac{1}{2}) \quad x=\frac{®}{6}\to(\frac{®}{6},\frac{3}{4}) \quad x=\frac{5®}{6}\to(\frac{5®}{6},\frac{3}{4})$$

בתחום הנתון, המקסימום המוחלט מתקבל בשתי נקודות, שבהן $y=\frac{3}{4}$ **, וזו גם משוואת המשיק.**

תשובה: משוואת המשיק בנקודות המקסימום היא $y=\frac{3}{4}$ **(פונקציה קבועה).**

ב. נחשב את השטח המקווקו, שבו $y=\frac{3}{4}$ **הפונקציה העליונה ו-** $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos(2x)$ **הפונקציה התחתונה.**



$$S=\int_0^{\frac{5®}{6}}(\frac{3}{4}-(\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x))dx\int_0^{\frac{5®}{6}}(\frac{3}{4}-\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x)dx$$
$$S=\frac{3}{4}x+\cos x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\frac{5®}{6}}=\frac{3}{4}x+\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{5®}{6}}$$
$$x=\frac{5®}{6}:\quad 1.314$$
$$x=0:\quad 1$$
$$S=(1.314)-(1)=0.314$$

תשובה: השטח המבוקש: 0.314 **יח"ר.**

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-\frac{3}{4}$ **שהיא הזזה אנכית כלפי מטה ב-** $\frac{3}{4}$ **של** $f(x)$ **.**

בהתאם, שיעורי ה- y **בנקודות המקסימום המוחלט (כמו בכל נקודה אחרת) קטֵנים ב-** $\frac{3}{4}$ **והם** $\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$ **.**

ומכאן שציר ה- x **, שמשוואתו** $y=0$ **, משיק לפונקציה בנקודות המקסימום המוחלט שלה.**

תשובה: משוואת המשיק היא $y=0$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{e^x}$ **.** $a<2$ **פרמטר.**

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור כל x **(** e^x **חיובי לכל** x**).**

ב. נביע את שיעורי ה- x **של נקודות הקיצון באמצעות** a **.**

$$f'(x)=\frac{(2x+2)e^x-(x^2+2x+a)e^x}{(e^x)^2}$$

$$0=e^x(2x+2-x^2-2x-a)\ /:e^x>0$$

$$0=-x^2+2-a$$

$$x^2=2-a$$

$$x=\pm\sqrt{2-a}\quad /\,a<2\rightarrow o.k.$$

נתון כי ההפרש בין הפתרון החיובי לפתרון השלילי הוא 2 **.**

$$\sqrt{2-a}-(-\sqrt{2-a})=2$$

$$2\sqrt{2-a}=2$$

$$\sqrt{2-a}=1\quad (\,)^2$$

$$2-a=1$$

$$\boxed{a=1}\quad test:\sqrt{2-1}=1\quad\rightarrow 1=1\quad\rightarrow o.k.$$

תשובה: $a=1$ **.**

ג. (1) נציב $a=1$ **בתבנית הפונקציה ונקבל:** $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{e^x}$ **.**

שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות:

$f(-10)=1784143\rightarrow+\infty$, $f(10)=5.5\cdot10^{-3}\rightarrow+0,$ **- לכן,** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

נמצא את נקודות החיתוך של $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{e^x}$ **עם הצירים.**

ציר y **:** $f(0)=\frac{0^2+2\cdot0+1}{e^0}=1\quad\rightarrow(0,1)$ **.**

ציר x **:** $0=x^2+2x+1=(x+1)^2\quad\rightarrow(-1,0)$

תשובה: $(0,1)$ **,** $(-1,0)$ **.**

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{(2x+2)e^x-(x^2+2x+1)e^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(2x+2-x^2-2x-1)}{(e^x)^2}$$

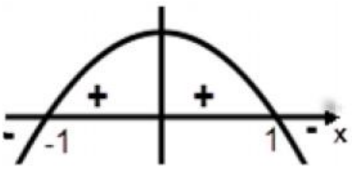
$$\boxed{f'(x)=\frac{-x^2+1}{e^x}}$$

$$0=-x^2+1$$

$$x^2=1$$

$$x=1 \quad \to f(1)=\frac{1^2+2\cdot1+1}{e^1}=\frac{4}{e} \quad \to \boxed{(1,\frac{4}{e})}$$

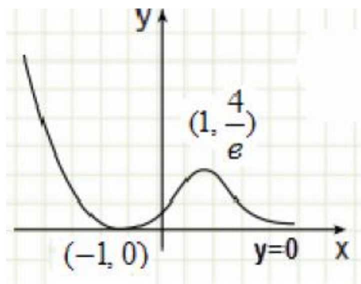
$$x=-1 \quad \to f(-1)=\frac{(-1)^2+2\cdot(-1)+1}{e^{-1}}=0 \quad \to \boxed{(-1,0)}$$



הביטוי שבמונה הוא של פרבולה הפוכה ("בוכה"),
העוברת משליליות לחיוביות עבור $x=-1$ **(ולכן מינימום),**
ומחיוביות לשליליות עבור $x=1$ **(ולכן מקסימום).**

תשובה: $(1,\frac{4}{e})$ **מקסימום ,** $(-1,0)$ **מינימום.**

(3) סקיצה מתאימה של $f(x)$ **.**



א. גרף II **חותך את ציר ה-** x **בשתי נקודות.**

בשמאלית הוא עובר מחיוביות לשליליות, כאשר גרף I **מעלייה לירידה (עם מקסימום מתאים).**

בימנית הוא עובר משליליות לחיוביות, כאשר גרף I **מירידה לעלייה (עם מינימום מתאים).**

לכן גרף II **הוא של פונקציית הנגזרת** $f'(x)$ **וגרף** I **הוא של הפונקציה** $f(x)$ **.**

תשובה: גרף I **-** $f(x)$ **, גרף** II **-** $f'(x)$ **.**

ב. נתון כי $f(x)=2x(\ell n\,x)^2$ **.**

יש לוודא שהביטוי שמקבלת הפונקציה $\ell n\,x$ **הוא חיובי ולכן** $x>0$ **.**

תחום ההגדרה: $x>0$ **.**

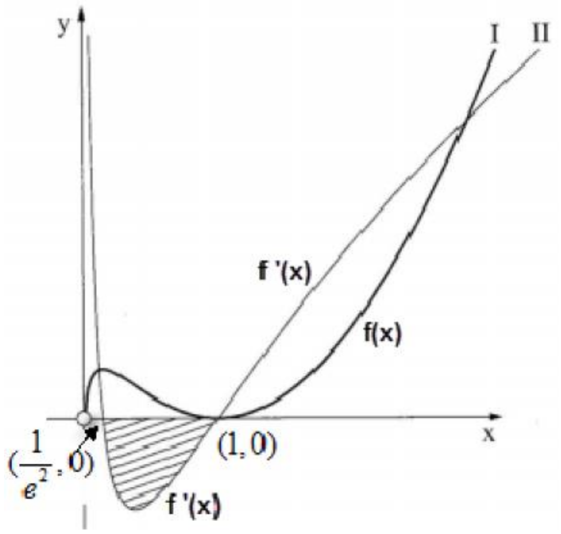
ב. נמצא את $f'(x)$ **ונשווה ל-** 0**, על-מנת למצוא את נקודות החיתוך של גרף** II **עם ציר ה-** x **.**

$$f'(x)=2(\ell n\,x)^2+2x\cdot 2(\ell n\,x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=2\ell n\,x\,(\ell n\,x+2)}$$

$$\ell n\,x=0 \quad\rightarrow x=1 \quad\rightarrow \boxed{(1,0)}$$

$$\ell n\,x=-2 \quad\rightarrow x=e^{-2}=\frac{1}{e^2} \quad\rightarrow \boxed{(\frac{1}{e^2},0)}$$



תשובה: $(1,0)$ **,** $(\frac{1}{e^2},0)$ **.**

ד. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ **חיובי, כאשר** $f'(x)>0$ **(או שווה לאפס, אולם לא מחליפה סימנים).**

תשובה: $x>1$ **או** $0<x<\frac{1}{e^2}$ **.**

ה. נחשב את השטח המקווקו שבין ציר ה- x **לבין פונקציית הנגזרת** $f'(x)$ **.**

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{1}(0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{\frac{1}{e^2}}^{1}$$

$$S=-f(1)-(-f(\frac{1}{e^2}))=-0+\frac{2}{e^2}\cdot 4$$

$$\boxed{S=\frac{8}{e^2}\approx 1.083}$$

תשובה: השטח המבוקש הוא $\frac{8}{e^2}\approx 1.083$ **יח"ר.**

נכתב ע"י עפר ילין